ECRICOME 1993 exercice 1

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx$ soit convergente.

On pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a) (i) Pour $k \in [[1,n]]$, montrer que : $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$.

(ii) Pour $k \in [[1,n-1]]$, montrer que : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(iii) En déduire que : $\dfrac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$.

b) En déduire la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

2°) a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u^{3/2}}\,du$.

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $I = -\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

3°) Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$.

a) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule et affiche P_n.

b) Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$.

c) A l'aide du **1°)**, déterminer la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

La convergence est-elle rapide ?

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1er cas.. $k \geq 2$. f est continue et décroissante sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$.

$\forall t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $f(t) \geq f(\frac{k}{n})$ et $\frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n}$. En intégrant il vient :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\tfrac{k}{n})\,dt = \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) f(\tfrac{k}{n}) = \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

2e cas.. $k=1$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{n}]$. f est continue et décroissante sur $[\varepsilon, \frac{1}{n}]$.

$\forall t \in [\varepsilon, \frac{1}{n}]$, $f(t) \geq f(\frac{1}{n})$ et $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. En intégrant il vient

$$\int_{\varepsilon}^{1/n} f(t)\,dt \geq \int_{\varepsilon}^{1/n} f(\tfrac{1}{n})\,dt = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right) f(\tfrac{1}{n}).$$ $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

Ainsi en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures on obtient :

$$\int_0^{1/n} f(t)\,dt \geq \frac{1}{n} f(\tfrac{1}{n})$$ c'est-à-dire $$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \frac{k}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

Finalement $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$. (1)

(ii) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. f est continue et décroissante sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

$\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $f(t) \leq f(\frac{k}{n})$ et $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n}$. En intégrant entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ il vient :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\tfrac{k}{n})\,dt = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f(\tfrac{k}{n}) = \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. (2)

(iii) En sommant (1) de 1 à n on obtient $S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$.

En sommant (2) de 1 à $n-1$ il vient $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$.

Alors $S_n - \frac{1}{n} f(1) \geq \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt$ ou $S_n \geq \frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt$.

Finalement : $\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_0^1 f(t)\,dt$ et ceci pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)}{n}+\int_{1/n}^{1} f(t)\,dt\right) = 0+\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$ car $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

Alors, par encadrement, on obtient $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Remarque.. ceci "généralise" le résultat que nous avions sur les sommes de Riemann associées à une fonction continue sur $[0,1]$

Q2 c) Posons $\forall u \in [1,+\infty[$, $g(u) = \frac{\ln u}{u^{3/2}}$. g est continue sur $[1,+\infty[$.

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u^{5/4}\frac{\ln u}{u^{3/2}}\right) = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{3/2-5/4}}\right) = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{1/4}}\right) = 0$$ par croissance comparée.

Alors $\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{g(u)}{1/u^{5/4}}\right) = 0$

1°) $g(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^{5/4}}\right)$.

2°) $\forall u \in [1,+\infty[$, $g(u) \geq 0$ et $\frac{1}{u^{5/4}} \geq 0$

3°) $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{5/4}}$ converge car $5/4 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} g(u)\,du$ converge.

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du$ converge.

Soit $A \in [1,+\infty[$. Posons $\forall u \in [1,+\infty[$, $\varphi(u) = \ln u$ et $\psi(u) = -2u^{-1/2}$.

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et $\forall u \in [1,+\infty[$, $\varphi'(u) = \frac{1}{u}$ et $\psi'(u) = \frac{1}{u^{3/2}}$.

ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$\int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = \left[-2u^{-1/2}\ln u\right]_1^A - \int_1^A \left(-2u^{-1/2}\right)\frac{1}{u}\,du = -2\frac{\ln A}{A^{1/2}} + 2\int_1^A \frac{du}{u^{3/2}}.$$

$$\int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = -2\frac{\ln A}{A^{1/2}} + 2\left[\frac{u^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_1^A = -2\frac{\ln A}{u^{1/2}} - 4\frac{1}{A^{1/2}} + 4.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{1/2}} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A^{1/2}} = 0$ par croissance comparée.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = 4.$

1) Nous retrouvons la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du$.

2) $\underline{I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = 4}$.

b) Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela justifie le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\ln 1/u}{\sqrt{1/u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^2} \times \sqrt{u}\,du = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du.$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du$ converge et vaut 4.

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4$. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge et vaut -4.

$\underline{\text{Ainsi } -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4}$. **Exercice** .. retrouver ce résultat directement en deux lignes...

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}$.

$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{n}{k}$.

ou $n-1$!

$\ln P_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)$ ... donc $\underline{P_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)}}$.

Pour calculer P_n nous commencerons donc à calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)$ et même $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} (\ln n - \ln k)$. En multipliant par $\sqrt{n}$ et en prenant l'exponentielle nous aurons P_n

```
program Ecricome_1993_exercice_1;
var k,n:integer;t,s:real;
begin
write('Donner n. n=');readln(n);
s:=0;t:=ln(n);                          ← Evite de recalculer ln n...
for k:=1 to n-1 do s:=s+(t-ln(k))/sqrt(k);
writeln('P',n,'=',exp(s/sqrt(n)));
end.
```

b) $P_{20} \simeq 8,5371$ $\quad P_{50} \simeq 13,9753$ $\quad P_{100} \simeq 18,8254$.

c) Posons $\forall x \in]0,1]$, $h(x) = -\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. h est continue sur $]0,1]$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$

h est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) = -\dfrac{1}{(\sqrt{x})^2}\left[\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - (\ln x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right] = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x - 2\right]$

$\forall x \in]0,1]$, $\ln x - 2 \leq 0$ et $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \geq 0$. $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) \leq 0$. h est décroissante sur $]0,1]$.

En appliquant Q 1 on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 h(x)\,dx = I = 4$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\ln k/n}{\sqrt{k/n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}} = \ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \ln P_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = e^I = e^4$. $\quad \boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = e^4}$.

Notons que $e^4 \simeq 54,5982$.

La convergence est donc très lente, ce qui n'est pas une grande surprise pour qui a pratiqué la méthode des rectangles.

<u>Remarque</u>. $P_{1000} \simeq 35,0562$, $P_{10000} \simeq 45,8910$, ...

ECRICOME 1994 exercice 2

Démonstration de l'égalité : [1] $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}$.

1° Soit $g :]\,0\,,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto -x\ln x$
Etablir le tableau de variations de g.

2° A l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}\,, \forall u \in \mathbb{R}$ $\qquad e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k\,!} + R_n(u)$, où R_n est continue et vérifie :

$$\forall u \geq 0 \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^u .$$

(*) c'est maintenant du cours.

3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$.

(*) *a)* Justifier l'existence de J_n .

b) Calculer J_0 ; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre J_{k+1} et J_k , pour $k \in \mathbb{N}$; en déduire la valeur de J_n .

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]\,0\,,1\,[$.

Effectuer sur l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $v = -(k+1)\ln x$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$.

4° *a)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!}I_k + r_n, \text{ avec } 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)\,!\,e^{n+1}} .$$

b) En déduire l'égalité [1] .

5° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Montrer que s_7 , que l'on calculera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice, est une valeur approchée à 10^{-7} près de $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Q1 g est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $g'(x) = -\ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x - 1$

$\forall x \in]0,1]$, $g'(x) = -\ln x + \ln \frac{1}{e}$.

$\forall x \in]0, \frac{1}{e}]$, $g'(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in [\frac{1}{e}, 1]$, $g'(x) \leqslant 0$.

g est croissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$.

Alors $\forall x \in]0,1]$, $0 \leqslant -x \ln x = g(x) \leqslant g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \ln(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$.

Donc $\forall x \in]0,1]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{e}$. $\forall x \in]0,1]$, $|g(x)| \leqslant \frac{1}{e}$.

Q2 $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = e^x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à φ à l'ordre n donne : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt$.

Donc $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \times 1 + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t\,dt$.

Posons $\forall u \in \mathbb{R}$, $R_n(u) = e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}$. $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$

1) R_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall u \in \mathbb{R}$, $R_n(u) = \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t\,dt$.

Soit $u \in \mathbb{R}^+$. $\forall t \in [0,u]$, $0 \leqslant e^t \leqslant e^u$ et $\frac{(u-t)^n}{n!} \geqslant 0$. $\forall t \in [0,u]$, $0 \leqslant \frac{(u-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{(u-t)^n}{n!} e^u$.

En intégrant entre 0 et u il vient $0 \leqslant R_n(u) \leqslant e^u \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!}\,dt$ car $0 \leqslant u$.

Or $\int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!}\,dt = \left[-\frac{(u-t)^{n+1}}{(n+1)\,n!} \right]_0^u = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc $0 \leqslant R_n(u) \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}$, $e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$, où R_n est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$\forall u \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant R_n(u) \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u$.

Q3 a) et b) **Version 1** Avec la fonction Gamma.

$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Alors $\int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt$ existe et vaut $((n+1)-1)!$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Donc J_n existe et vaut $n!$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Version 2.. On suit le texte. Soit $n \in \mathbb{N}$.

* $u \mapsto e^{-u} u^n$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\lim_{u \to +\infty} (u^2 (e^{-u} u^n)) = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u^{n+2}}{e^u} \right) = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $e^{-u} u^n \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$

2) $\forall u \in [1, +\infty[$, $e^{-u} u^n \geqslant 0$ et $\frac{1}{u^2} \geqslant 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \, du$ converge. J_n existe pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A e^{-u} u^{k+1} du \underset{\substack{\uparrow \\ u \mapsto (-e^{-u}) \text{ et } u \mapsto u^{k+1} \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[}}{=} [(-e^{-u}) u^{k+1}]_0^A - \int_0^A (-e^{-u})(k+1) u^k du = -\frac{A^{k+1}}{e^A} + (k+1) \int_0^A e^{-u} u^k du.$$

$\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{A^{k+1}}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée. En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient alors

$$J_{k+1} = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{k+1} du = 0 + (k+1) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du = (k+1) J_k.$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $J_{k+1} = (k+1) J_k$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{J_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{J_k}{k!}$. Alors $\left(\frac{J_k}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{J_k}{k!} = \frac{J_0}{0!} = J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} [-e^{-u}]_0^A = 1$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{J_k}{k!}=1$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $J_k=k!$ ou $\underline{\forall n\in\mathbb{N}, J_n=n!}$

c) $x\mapsto -(k+1)x$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $v=-(k+1)\ln x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx = \int_{-(k+1)\ln\varepsilon}^{-(k+1)\ln 1}\left(e^{-\frac{v}{k+1}}\right)^k\left(-\frac{v}{k+1}\right)^k\left(-\frac{1}{k+1}e^{-\frac{v}{k+1}}\right)dv.$$

" $v=-(k+1)\ln x$,
$x=e^{-\frac{v}{k+1}}$ et
$dx=-\frac{1}{k+1}e^{-\frac{v}{k+1}}dv$ "

$$\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}\left(e^{-\frac{v}{k+1}}\right)^{k+1}v^k\,dv=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}e^{-v}v^k\,dv.$$

$$\underline{\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}e^{-v}v^k\,dv.}$$

d) Reprenons k dans $\mathbb{N}$ et remarquons que $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(-(k+1)\ln\varepsilon\right)=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}J_k=\frac{(-1)^k\,k!}{(k+1)^{k+1}}$.

Ainsi $\underline{I_k=\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,dx \text{ converge et vaut } \frac{(-1)^k\,k!}{(k+1)^{k+1}}}$.

Q4 Remarques 1. $g:\ ]0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -x\ln x$. Nous avons vu que $\forall x\in\,]0,1],\ 0\le g(x)\le\frac{1}{e}$.

De plus g est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0$. Alors g est prolongeable par continuité en 0.

Notons $\hat g$ son prolongement par continuité à 0. $\forall x\in[0,1]$, $\hat g(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

Alors $\underline{\forall x\in[0,1],\ 0\le\hat g(x)\le\frac{1}{e}}$.

$\forall x\in\,]0,1]$, $x^{-x}=e^{-x\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-x\ln x}=e^{-0}=1$. Alors $x\mapsto x^{-x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité à 0. Ainsi $\underline{\int_0^1 x^{-x}\,dx \text{ est convergente}}$.

$\underline{\underline{\ell}}$.. $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx \overset{!!!}{\underset{(*)}{=}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^\ell x^\ell (\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx.$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell \;!!$$

Sauf que $(*)$ est illicite. D'où l'idée de montrer $(*)$ en vérifiant que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^\ell x^\ell (\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx$ ce qui revient à montrer

que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell = \int_0^1 x^{-x}\,dx.$

$\underline{\text{o)}}$ Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall u\in\mathbb{R}_+$, $e^u = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{u^\ell}{\ell!} + R_n(u)$ avec $0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{n+1} e^u.$

$\forall x\in[0,1]$, $e^{\hat{g}(x)} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\hat{g}(x))^\ell}{\ell!} + R_n(\hat{g}(x))$. Notons que $x\mapsto R_n(\hat{g}(x))$ est

continue sur $[0,1]$ car R_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\hat{g}$ est continue sur $[0,1]$.

Alors en intégrant on obtient :

$$\int_0^1 e^{\hat{g}(x)}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(\hat{g}(x))^\ell}{\ell!}\,dx + \int_0^1 R_n(\hat{g}(x))\,dx \quad (*).$$

$\underline{\text{Posons } r_n = \int_0^1 R_n(\hat{g}(x))\,dx.}$

$\forall x\in[0,1]$, $\hat{g}(x)\in\mathbb{R}^+$ donc $\forall x\in[0,1]$, $0 \leq R_n(\hat{g}(x)) \overset{\text{Q2}}{\leq} \frac{(\hat{g}(x))^{n+1}}{(n+1)!} e^{\hat{g}(x)} \leq \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}.$ $\quad 0\leq \hat{g}(x)\leq \frac{1}{e}$

donc $0 \leq r_n = \int_0^1 R_n(\hat{g}(x))\,dx \leq \int_0^1 \frac{(1/e)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}\,dx$ car $0\leq 1$.

Alors $0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\, e^{n+1}}.$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{g(x)}\,dx = \int_0^1 e^{\hat{g}(x)}\,dx \overset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx + r_n.$$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_0^1 x^\ell (\ln x)^\ell\,dx + r_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell + r_n.$$

Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n$, avec $0 \le r_n \le \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\,e^{n+1}}$.

$\lim_{n\to+\infty} \left((n+1)!\,e^{n+1}\right) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\,e^{n+1}} = 0$.

Alors par encadrement on obtient : $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 x^{-x}\,dx - r_n\right) = \int_0^1 x^{-x}\,dx$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^k}{k!} I_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k\,k!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$. Ceci donne encore $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$

Alors 1) La série de terme général $\frac{1}{k^k}$ converge.

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$.

Voir sur le même thème Ecricome 1997 exercice 2.

ECRICOME 2006 exercice 2

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t , définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. Etude de f.

   a. Justifier que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

   b. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

   c. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

   $$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$$

   est convergente.
   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,dt.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

   $$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt.$$

   a. Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   b. Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.
   Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   c. En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,

   $$\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.$$

   d. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

   $$g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

EXERCICE 2

1. a. Notons que le simple fait que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ ne donne pas l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout (x,t) dans $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car le domaine de définition de f n'est pas $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Il faut donc en faire un peu plus au niveau du a) pour pouvoir traiter le b) dans de bonnes conditions...

Posons $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,t) = 1 + x\,t$. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. En particulier φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x\,t > 0\}$. Observons que $\Omega = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Ω est donc l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (programme de première année...)

Montrons alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

$(x,t) \to -t^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, car c'est une fonction polynôme, et $u \to e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; par composition $(x,t) \to e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, $\forall (x,t) \in \Omega$, $\varphi(x,t) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u \to \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $(x,t) \to \sqrt{1 + x\,t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Alors par produit f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \boxed{\text{l'ouvert}}\ \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x\,t > 0\}.}$$

▲ *Remarque* *Ce résultat assure l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *et de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ *lorsque* (x,t) *est dans* Ω. ▼

Notons que $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1 + x\,t \geqslant 1 > 0$ donc $[0,+\infty[\times[0,+\infty[\subset \Omega$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$$

b. $\forall (x,t) \in \Omega,\ f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1 + x\,t}$ donc $\forall (x,t) \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t^2}\,\dfrac{t}{2\sqrt{1 + x\,t}} = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}(1 + x\,t)^{-\frac{1}{2}}$.

Alors $\forall (x,t) \in \Omega,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)t\,(1 + x\,t)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}\,\dfrac{1}{(1 + x\,t)^{\frac{3}{2}}}$. En particulier :

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{2}\,e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{(1 + x\,t)}}.}$$

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{t^2}{4}\, e^{-t^2}\, \frac{1}{(1+x\,t)^{\frac{3}{2}}}.}$$

c. $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1+x\,t \geqslant 1$ donc $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t} \geqslant 1$.

Ainsi $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}$.

Alors $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}\, \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}$.

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\, e^{-t^2}.}$$

2. Soit α un réel strictement positif. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ h_\alpha(t) = t^\alpha\, e^{-t^2}$.

h_α est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} h_\alpha(t) = 0$. Ainsi h_α est prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne déjà la convergence de $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,dt$. Montrons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,dt$.

$\forall t \in [1,+\infty[, t \leqslant t^2$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ -t^2 \leqslant -t$. Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ et $0 \leqslant t^\alpha$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant h_\alpha(t) \leqslant t^\alpha\, e^{-t}$.

$\alpha+1$ étant strictement positif, $\Gamma(\alpha+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t}\,dt$ existe. En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t}\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,dt$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } \alpha \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t^2}\,dt \text{ converge.}}$$

▲ *Exercice* *Montrer en fait que cette intégrale converge si et seulement si* $\alpha \in]-1,+\infty[$. ▼

Soit x un réel positif. Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ u(t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$.

• u est continue sur $[0,+\infty[$.

Rusons un peu pour éviter l'équivalent qui oblige à faire deux cas $x=0$ et $x \neq 0$; le premier cas ne passant pas dans le résultat précédent à cause du α strictement positif...

Observons que $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,dt$ converge. Montrons alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$ converge.

• $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant u(t) = e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{t+x\,t} = \sqrt{1+x}\,t^{1/2}\,e^{-t^2}$;

• $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{1/2}\,e^{-t^2}\,dt$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/2}\,e^{-t^2}\,dt$ converge d'après ce qui précède, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{1+x}\,t^{1/2}\,e^{-t^2}\,dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$. Ceci achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,dt$.

Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}$.

- v est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant t\,e^{-t^2}$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,dt$ converge d'après le début de la question.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(t)\,dt$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif },\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}\,dt \text{ convergent.}}$$

3. a) Soient x et y deux éléments de $[0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1+x\,t \leqslant 1+y\,t$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t} \leqslant \sqrt{1+y\,t}$ et $0 \leqslant e^{-t^2}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}\,dt$ ou $g(x) \leqslant g(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ x \leqslant y \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)$.

$$\boxed{g \text{ est croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b. Fixons t dans $[0,+\infty[$ et posons : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t(x) = f(x,t)$.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω qui contient $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on peut affirmer que ℓ_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\ell_t''(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à ℓ_t permet d'écrire que :

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |\ell_t(x) - \ell_t(x_0) - (x-x_0)\,\ell_t'(x_0)| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{2} \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} |\ell_t''(u)|$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{2} \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right|$.

La majoration de **1. c.** donne : $\forall u \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right[\leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$. Par conséquent :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2}\,\frac{t^2}{4}\,e^{-t^2} = \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.$$

$$\boxed{\text{Si } x_0 \in [0,+\infty[,\ \forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.}$$

c. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t$ converge d'après la question 2.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\mathrm{d}t$. De plus :

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente (donc convergente) et l'on peut écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(x_0,t)\,\mathrm{d}t - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall x_0 \in [0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[,\ \left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

d. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$ distinct de x_0.

$\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En divisant par $|x-x_0|$ il vient :

$$0 \leqslant \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left(\frac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$

Alors, par encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi g est dérivable en x_0 et $\displaystyle g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et } \forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.}$$

$\forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \geqslant 0$, donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

$$\boxed{\text{On retrouve ainsi la croissance de } g \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

ECRICOME 2009 exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt.$$

1. Domaine de définition de f :

   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.

   (b) Soit x un réel fixé. Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

   $$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :

   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

   (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

   $$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

   (b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. Etude locale de f et f' en 0 :

→

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du$ est convergente.

(b) A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

EXERCICE 2

1. Domaine de définition de f :

(a) Soit a un réel strictement positif. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_a(t) = \begin{cases} a\,e^{-a\,t} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

φ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Il en est alors de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t$.

En remarquant que $\forall t \in [0,+\infty[,\ e^{-at} = \dfrac{1}{a}\,\varphi_a(t)$ on peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif, l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\cdot}$$

(b) Soit x un réel. Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}$. ψ_x est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

- Supposons que x vaut 0. $\forall t \in [0,+\infty[, \psi_x(t) = \psi_0(t) = e^{-2t}$. (a) montre alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Remarque *f est définie en 0 et* $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$

- Supposons x non nul. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(x^2\,e^{2t}) = +\infty$ donc $1 =_{t\to+\infty} \mathrm{o}(x^2\,e^{2t})$. Alors $1 + x^2\,e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2\,e^{2t}$.

Par conséquent : $\psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2t}\sqrt{x^2\,e^{2t}} = e^{-2t}\,|x|\,e^{t} = |x|\,e^{-t}$.

- ◇ $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\,e^{-t}$.
- ◇ $\forall t \in [0,+\infty[,\ |x|\,e^{-t} \geqslant 0$.
- ◇ D'après (a), $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Soit x un réel strictement positif. Soit t un réel positif ou nul.

- $x\,e^t = |x\,e^t| = \sqrt{x^2\,e^{2t}} \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}}$. Ainsi : $x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}}$.
- $\left(x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\,e^{2t} + 2\,x\,e^t\,\dfrac{e^{-t}}{2x} + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} = x^2\,e^{2t} + 1 + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} \geqslant 1 + x^2\,e^{2t}$.

Alors $\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant \sqrt{\left(x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2} = \left|x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right|$.

Or $x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$ est un réel positif. Ainsi $\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout réel } t \text{ positif ou nul} : x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\cdot}$$

(b) Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$ et $e^{-2t} \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^t\,e^{-2t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t\,e^{-2t} + \dfrac{e^{-t}}{2x}\,e^{-2t}$.

Ou : $\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^{-t} \leqslant \psi_x(t) \leqslant x\,e^{-t} + \dfrac{1}{2x}\,e^{-3t}\quad (\triangle)$.

D'après la première question $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement 1 et $\dfrac{1}{3}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x\,e^{-t} + \frac{1}{2x}e^{-3t}\right)\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement x et $x + \dfrac{1}{2x}\times\dfrac{1}{3}\cdot$

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

Alors l'inégalité $(\triangle)$ et la croissance de l'intégrale $(0 \leqslant +\infty)$ donnent $x \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x+\dfrac{1}{6x}$ ou $x \leqslant f(x) \leqslant x+\dfrac{1}{6x}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif} : x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}\cdot}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ x \leqslant f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donnent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \dfrac{1}{6x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6x} = 0$ donnent par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big) = 0$. Alors

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet pour asymptote en } +\infty \text{ la droite d'équation } y = x.}$$

Remarques *1.* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) - x = \dfrac{1}{6x} \geqslant 0$. *Notons encore que* $f(0) - 0 = f(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) - x = \dfrac{1}{6x} \geqslant 0.$

Mieux encore : $\forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) \geqslant 0 \geqslant x$ *donc* $\forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) - x \geqslant 0$. *Finalement :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x \geqslant 0$.

Ainsi la courbe représentative de f *est au-dessus de la droite d'équation* $y = x$.

2. Par parité, la droite d'équation $y = -x$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *en* $-\infty$ *et se trouve au-dessous de cette courbe.*

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) Soit x un réel strictement positif.

Version 1. La fonction $t \to x\,e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u = x\,e^t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t = x^2\int_0^A \frac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t\,\mathrm{d}t = x^2\int_x^{x\,e^A}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty}(x\,e^A)=+\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,dt = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

Version 2. Ramons pour utiliser avec précision le théorème du programme (qui en particulier "fonctionne" sur des intervalles ouverts ! !).

Posons $\forall t\in]0,+\infty[,\ \ell(t)=x\,e^t$ et $\forall u\in]x,+\infty[,\ g(u)=x^2\,\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$.

ℓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[,\ \ell'(t)=x\,e^t>0$.

ℓ est donc continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle définit alors une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{t\to0}\ell(t),\lim\limits_{t\to+\infty}\ell(t)[$ c'est à dire sur $]x,+\infty[$. Ainsi :

- $\diamond$ g est continue sur $]x,+\infty[$.
- $\diamond$ ℓ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]x,+\infty[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

Notons que $\forall t\in]0,+\infty[,\ g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)=x^2\,\dfrac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t=e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}=\psi_x(t).$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ converge et est égale à $f(x)$. Ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ donc $f(x)$.

Finalement $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du \text{ converge et } f(x)=x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.}$$

(b) Notons que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = x^2\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du-\int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du\right).$

Posons $\forall u\in]0,+\infty[,\ h(u)=\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$. h est continue sur $]0,+\infty[$. La primitive H de h sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Notons que $\forall x\in]0,+\infty[,\ H(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du-H(x)\right).$

$x\to x^2$ et $x\to\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du-H(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ($\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ est une constante...).

Par produit :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

De plus $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=2\,x\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du-H(x)\right)-x^2\,h(x).$

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=2\,x\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}=\frac{1}{x}\left(2\,x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-\sqrt{1+x^2}\right).$$

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{2\,f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{2\,f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

(c) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u\in[x,+\infty[,\ v(u)=\sqrt{1+u^2}$ et $w(u)=-\dfrac{1}{2\,u^2}$.

v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$. De plus $\forall u\in[x,+\infty[,\ v'(u)=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $w'(u)=\dfrac{1}{u^3}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u=\left[-\frac{1}{2\,u^2}\sqrt{1+u^2}\right]_x^A-\int_x^A\left(-\frac{1}{2\,u^2}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}-\frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}+\frac{1}{2}\int_x^A\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

◇ $\dfrac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}\underset{A\to+\infty}{\sim}\dfrac{A}{2\,A^2}=\dfrac{1}{2\,A}$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1}{2\,A}=0$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}=0$.

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}-\dfrac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}\right)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}$.

◇ $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}+\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Alors $\displaystyle 2\,f(x)=2\,x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u=\sqrt{1+x^2}+x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} \text{ converge et } 2\,f(x)=\sqrt{1+x^2}+x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.}$$

Alors $\displaystyle\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}=x\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Soit x un réel strictement positif. $u\to\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $[x,+\infty[$, $x<+\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge. Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}>0$. Donc $\displaystyle x\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}>0$.

Ainsi $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)>0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

4. Etude locale de f et f' en 0 :

(a) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u \in [x,+\infty[,\ z(u) = \ln u$ et $t(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Notons que $\forall u \in [x,+\infty[,\ t(u) = (1+u^2)^{-\frac{1}{2}}$.

z et t sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$.

De plus $\forall u \in [x,+\infty[,\ z'(u) = \dfrac{1}{u}$ et $t'(u) = -\dfrac{1}{2}\,(2\,u)\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A - \int_x^A (\ln u)\left(-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}u = \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

◇ $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln A}{A}$ et par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$.

◇ $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} : \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.}$$

Nous venons de voir que pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge.

En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge. Ne reste plus qu'à montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge.

$\displaystyle\lim_{u\to0^+} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ car $\displaystyle\lim_{u\to0^+}(u\ln u) = 0$ et $\displaystyle\lim_{u\to0^+}(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = 1$.

Alors $u \to \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité à $[0,1]$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du \text{ converge.}}$$

(b) $\displaystyle\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2} =}{x} = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et $-x\ln x \neq 0$.

Alors $\displaystyle\forall x \in]0,1[,\ \frac{f'(x)}{-x\ln x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln x}\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1,\ \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ (car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge).

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{f'(x)}{-x\ln x} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{f'x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ \ln x.}$$

Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

$2\,f(x)-\sqrt{1+x^2}=x\,f'(x)$. $2\,\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=2\,f(x)-1=x\,f'(x)+\sqrt{1+x^2}-1=x\,f'(x)+\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

$2\,\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=x\,f'(x)+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

En divisant par $-x^2\,\ln x$ qui n'est pas nul on obtient : $2\,\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\,\ln x}=\dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\,\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\,\ln x}\right)=1$.

Alors $2\,\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}-x^2\,\ln x$ et :

$$\boxed{f(x)-\frac{1}{2}\underset{x\to 0^+}{\sim}-\frac{x^2\,\ln x}{2}.}$$

(c) Nous avons déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

∇ Version 1 $f(x)-\dfrac{1}{2}\underset{x\to 0^+}{\sim}-\dfrac{x^2\,\ln x}{2}$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2\,\ln x}{2}\right)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{1}{2}=f(0)$. Par conséquent f est continue à droite en 0. Ainsi f est continue SUR $[0,+\infty[$.

$f'(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-x\,\ln x$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x\,\ln x)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$.

Résumons : f est continue sur $[0,+\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et f' admet une limite finie à droite en 0. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

∇ Version 2 Retrouvons rapidement ce résultat en utilisant très strictement le programme.

Soit $\tilde{f}$ la restriction de f à $]0,+\infty[$.

$\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\tilde{f})'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$ donc $(\tilde{f})'$ admet une limite finie en 0.

Le cours indique alors que $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction $\widehat{\tilde{f}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $]0,+\infty[$.

De plus par continuité : $\widehat{\tilde{f}}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\widehat{\tilde{f}}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\widehat{\tilde{f}}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\tilde{f}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Ainsi $\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $[0,+\infty[$. f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Remarque *Ceci montre que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$. Notons que nous ne pouvons pas encore parler de $f'(0)$ car nous n'avons pas montré que f est dérivable en 0.*

Par parité $\forall x\in]-\infty,0]$, $f(x)=f(-x)$.

$x\to -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$, $\forall x\in]-\infty,0]$, $-x\in[0,+\infty[$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Par composition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

Alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(-x)$ et f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -f'(-x)$.

Donc : $f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \big(-f'(-x)\big) = -\lim_{x \to 0^-} f'(-x) = -\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -f'_d(0)$.

$f'_g(0) = -f'_d(0)$ or $f'_d(0) = 0$. Ainsi $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

ECRICOME 2010 exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}du.$$

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

   (a) Vérifier que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

   En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul.

   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$.

   (c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

   A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que :

   $$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**

   (a) En utilisant la question **2**, démontrer que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du.$$

   (b) *On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*

   Donner alors un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ en fonction de I.

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0,1[$.

Comme t n'est pas égal à 1, $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1-t^n}{1-t}\cdot$ Donc $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=\dfrac{1-t}{1-t^n}\cdot$

Alors $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)=\dfrac{1-t}{1-t^n}-(1-t)=(1-t)\left(\dfrac{1}{1-t^n}-1\right)=\dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1[,\ \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)=\frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\cdot}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0,1[$.

$0\leqslant t<1$ donne $t^n\leqslant t$, puis $0<1-t\leqslant 1-t^n$. On a alors $0<\dfrac{1-t}{1-t^n}\leqslant 1$ et $t^n\geqslant 0$ donc $0\leqslant\dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\leqslant t^n$.

Ainsi $0\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)\leqslant t^n\quad(\bigstar)$.

Notons que pour $t=1$, t^n vaut 1 et $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)$ vaut $\dfrac{1}{n}\cdot$

Comme $\dfrac{1}{n}\leqslant 1$, l'inégalité $(\bigstar)$ vaut encore pour $t=1$.

Ainsi : $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)\leqslant t^n$.

Puisque $0\leqslant 1$ en intégrant entre 0 et 1 il vient : $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=u_n$, $\displaystyle\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdot$

Alors $0\leqslant u_n-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{n+1}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant u_n-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{n+1}\cdot}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1}\text{ converge vers }\frac{1}{2}\cdot}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall t\in[0,1[,\ \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{(1-t)\,t}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{t-t^2}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{(t^n)^{\frac{1}{n}}-(t^n)^{\frac{2}{n}}}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}$.

Posons alors $\forall t\in[0,1[,\ \varphi_n(t)=t^n$ et $h_n(t)=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{t^{\frac{1}{n}}-t^{\frac{2}{n}}}{1-t}\cdot$ Notons que $\forall t\in[0,1[,\ \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}=\varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)$.

h_n est continue sur $[0,1[$ et il n'est pas difficile de vérifier que φ_n est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

Le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées proposé par le programme permet de dire que $\displaystyle\int_0^1\varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 h_n(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et qu'en cas de convergence elles sont égales.

Or $\forall t\in[0,1[,\ \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)=\dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}=\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)$.

Comme $t \to \dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)$ est continue sur $[0,1]$, $t \to \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}$ est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,dt$ est convergente. Donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,h_n(\varphi_n(t))\,dt$ converge.

Ceci donne alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 h_n(u)\,du$ et l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,h_n(\varphi_n(t))\,dt = \int_0^1 h_n(u)\,du.$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{n}\,\frac{u^{\frac{1}{n}}-u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\right) du$ convergent et sont égales.

Notons que cela donne la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}-u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,du$ donc l'existence de v_n.

De plus $\displaystyle u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\right) dt = \int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}-u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,du = \frac{v_n}{n}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}-u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,du \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}\cdot}$$

2. Résultats intermédiaires.

(a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$. Alors $(\ln x)^k \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^k$ et ainsi $\dfrac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{k-1}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}.}$$

(b) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in]0,1[$, $\psi_k(x) = \dfrac{(\ln x)^k}{x-1}\cdot$

ψ_k est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 1 (d'après **(a)**).

On peut donc déjà dire que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_k(x)\,dx$ converge. Montrons que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_k(x)\,dx$ converge.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x}\,|\psi_k(x)|\right) = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sqrt{x}\,(\ln x)^k}{x-1}\right| = 0$ par croissance comparée. Donc :

- $|\psi_k(x)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de 0.
- $|\psi_k|$ et $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont positives sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge ($\frac{1}{2} < 1$).

Les critères de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |\psi_k(x)|\,dx$.

Alors $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_k(x)\,dx$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

(c) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 2\,e^{2x}$ et $f''(x) = e^x - 4\,e^{2x}$. $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en 0 à l'ordre 1 pour f donne :

$\forall x \in]-\infty, 0],\ |f(x) - f(0) - f'(0)\,x| \leqslant \dfrac{|x-0|^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |f''(u)|$ ou $\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}|$.

Notons que $\forall u \in]-\infty, 0],\ |e^u - 4e^{2u}| = e^u\,|1 - 4e^u| \leqslant |1 - 4\,e^u|$.

Posons alors : $\forall u \in]-\infty, 0], \ell(u) = 1 - 4\,e^u$. $u \to e^u$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc ℓ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

De plus $\ell(0) = -3$ et $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \ell(u) = 1$. Alors $\forall u \in]-\infty, 0],\ -3 \leqslant \ell(u) < 1$. Ainsi $\forall u \in]-\infty, 0],\ |\ell(u)| \leqslant 3$.

Donc $\forall u \in]-\infty, 0],\ |e^u - 4e^{2u}| = e^u\,|1 - 4e^u| \leqslant |1 - 4\,e^u| \leqslant 3$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0],\ \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}| \leqslant 3$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}| \leqslant \dfrac{3\,x^2}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3\,x^2}{2}\cdot}$$

3. Application.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

Soit u un élément de $]0, 1[$. $\dfrac{\ln u}{n}$ appartient à $]-\infty, 0[$.

Alors, d'après **2. (c)** on a : $\left|e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \dfrac{\ln u}{n}\right| \leqslant \dfrac{3\,(\ln u)^2}{2\,n^2}\cdot$ De plus $\dfrac{1}{1-u} \geqslant 0$.

Donc : $\left|\dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right| = \dfrac{\left|e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}\right|}{1-u} \leqslant \dfrac{1}{1-u}\,\dfrac{3\,(\ln u)^2}{2n^2} = \dfrac{3}{2\,n^2}\,\dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\cdot$ Alors :

- $\forall u \in]0, 1[,\ \left|\dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right| \leqslant \dfrac{3}{2\,n^2}\,\dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\cdot$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$ converge d'après **2. (b)** donc $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{2\,n^2}\,\frac{(\ln u)^2}{1-u}\right)\mathrm{d}u$ converge également.

Les critère de comparaison concernant les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right|\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u$ est alors absolument convergente (donc convergente mais cela on le savait déjà) ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right|\mathrm{d}u$.

Mieux $\left|v_n+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| = \left|\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}}-e^{\frac{2\ln u}{n}}+\frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|\dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}}-e^{\frac{2\ln u}{n}}+\frac{\ln u}{n}}{1-u}\right| du \leqslant \dfrac{3}{2\,n^2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \left|v_n+\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{3}{2\,n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.}$$

(b) Posons $J=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\,du$ et rappelons que $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln u}{1-u}\,du$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|v_n+\dfrac{1}{n}I\right| \leqslant \dfrac{3}{2\,n^2}J$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |n\,v_n+I| \leqslant \dfrac{3}{2\,n}J$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2\,n}J=0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,v_n)=-I$.

$u\to\dfrac{\ln u}{1-u}$ est strictement négative sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln u}{1-u}\,du$ converge. Alors $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln u}{1-u}\,du<0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,v_n)=-I$ et $-I$ n'est pas nul. Alors $n\,v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -I$. Ce qui donne encore :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n}\cdot}$$

Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{v_n}{n}\cdot$ Alors

$$\boxed{u_n-\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n^2}\cdot}$$

ECRICOME 2012 exercice 1

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.
2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.
   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

1. Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. $t \to e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^z e^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\,e^{-at}\right]_0^z = \frac{1}{a}\left(1-e^{-az}\right)$.

Alors $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\int_0^z e^{-at}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\left(1-e^{-az}\right)\right) = \frac{1}{a}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } a \text{ de } \mathbb{R}_+^*,\ I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\cdot}$$

Remarque On pouvait obtenir ce résultat en faisant intervenir "la densité usuelle" d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

Qui peut le plus peut le moins. Montrons donc que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$ converge. Soit r dans $\mathbb{N}^*$.

- $t \to (x+e^t)^r$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $t \to \dfrac{1}{(x+e^t)^r}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in [0,+\infty[,\ x+e^t \geqslant e^t > 0$ et la fonction $z \to z^r$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ (x+e^t)^r \geqslant e^{rt} > 0$. Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 < \dfrac{1}{(1+e^t)^r} \leqslant \dfrac{1}{e^{rt}} = e^{-rt}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$.

De plus, d'après le début de la question, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rt}\,\mathrm{d}t$ converge car r est strictement positif. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ et pour tout élément } r \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r} \text{ converge.}}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}_+,\ f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2} \text{ convergent.}}$$

♣ *Exercice Trouver le domaine de définition de* $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$ *pour tout élément* r *de* $\mathbb{N}^*$.

2. Soient x et t deux éléments de $\mathbb{R}_+$.

$0 \leqslant \left(\sqrt{x}-e^{\frac{t}{2}}\right)^2 = x - 2\sqrt{x}\,e^{\frac{t}{2}} + e^t = x - 2\sqrt{x\,e^t} + e^t$ donc $2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x + e^t$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x + e^t.}$$

Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 < 2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x+e^t$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x+e^t} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x\,e^t}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-\frac{t}{2}}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge et vaut $f(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ donc 2.

Alors par croissance de l'intégrale il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ (car $0 \leqslant +\infty$).

Donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times 2 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot}$$

3. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Soit t un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\dfrac{1}{x+e^t} - \dfrac{1}{y+e^t} = \dfrac{y+e^t-x-e^t}{(x+e^t)(y+e^t)} = \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}\cdot$

$0 < e^t \leqslant x+e^t$ et $0 < e^t \leqslant y+e^t$ donc $0 < e^{2t} = e^t\, e^t \leqslant (x+e^t)(y+e^t)$. Alors :

$0 < \dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leqslant \dfrac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}$ et $y - x > 0$. Ainsi : $0 < \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} \leqslant (y-x)\, e^{-2t}$.

Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 < \dfrac{1}{x+e^t} - \dfrac{1}{y+e^t} \leqslant (y-x)\, e^{-2t}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge et vaut $f(x)$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y+e^t}$ converge et vaut $f(y)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors par stricte croissance de l'intégrale il vient : $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y+e^t} \leqslant (y-x) \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ (car $0 < +\infty$).

Donc $0 < f(x) - f(y) \leqslant (y-x) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{y-x}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow 0 < f(x) - f(y) \leqslant \frac{y-x}{2}\cdot}$$

4. Montrons d'abord que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x-y|$. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$.

Si $x = y$ on a clairement $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x-y|$ car $0 \leqslant 0$!

Supposons $x < y$. D'après **Q3** : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}\cdot$

Donc $|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2}\,|y-x| = \dfrac{1}{2}\,|x-y|$.

Supposons $y < x$. D'après **Q3** : $0 < f(y) - f(x) \leqslant \dfrac{x-y}{2}\cdot$

Donc $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \leqslant \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}\,|x-y|$. Finalement :

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|.}$$

- Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x-y|$ et $\displaystyle\lim_{x\to y} \left(\frac{1}{2}\,|x-y|\right) = 0$.

Alors par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$ et ainsi f est continue en y, ceci pour tout y dans $\mathbb{R}_+$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- D'après **Q3**, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow 0 < f(x) - f(y)$. Donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_1 = 1$ d'après **Q1**.

D'après **Q2**, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ il vient par encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Le théorème de la bijection et les trois points précédents montrent que :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection continue strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ sur }]0,1].}$$

5. Posons $\forall x \in [0,+\infty[,\ h(x) = f(x) - x$.

• f et $x \to -x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc par somme h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• f et $x \to -x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$.

• $h(0) = f(0) - 0 = 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

Le théorème de la bijection et les trois points précédents montrent que h réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$.

Or 0 est élément de $]-\infty,1]$ donc il existe un unique élément α de $\mathbb{R}_+$ tel que $h(\alpha) = 0$ ou tel que $f(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

Nous avons vu dans **Q4** que f prend ses valeurs dans $]0,1]$. Donc $\alpha = f(\alpha) \in]0,1]$.

$$\boxed{\alpha \text{ appartient à }]0,1].}$$

6. (a) Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n existe, u_n appartient à $\mathbb{R}_+$ et $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

• u_0 existe et vaut 0. Alors u_0 appartient à $\mathbb{R}_+$ et $|\alpha - u_0| = \alpha \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

u_n existe et appartient à $\mathbb{R}_+$ donc $f(u_n)$ existe et appartient à $]0,1]$. Alors u_{n+1} existe et appartient à $\mathbb{R}_+$.

u_n et α sont deux éléments de $\mathbb{R}_+$ donc : $|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ est un élément de } \mathbb{R}_+ \text{ et } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \alpha.}$$

6. (b) Nous écrirons une fonction et une procédure donnant N (ce qui est plus que ce qui est demandé) et u_N.

Profitons de l'occasion pour dire que cette fonction f se calcule en une ligne (c'est dire l'intérêt de l'exercice...).

En effet $f(0) = 1$ et pour x dans $]0,+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + e^t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x\,e^{-t} + 1}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z \frac{e^{-t}}{x\,e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\ \ln(x\,e^{-t} + 1)\right]_0^z = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

```

function Ecricome_2012(epsi:real;var N:integer):real;

var u,stop:real;

```

```
begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do
      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;

Ecricome_2012:=u;
end;
```

Remarque *Cette fonction permet d'obtenir* $\alpha \simeq 0.74688$.

La même chose en utilisant une procédure :

```

procedure Ecricome_2012b(epsi:real;var N:integer;var u:real);

var stop:real;

begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do
      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;
end;
```

7. Ici encore nous ferons un peu plus que demandé en montrant le résultat pour x dans $\mathbb{R}^+$ à la place de x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soient x un réel positif et h un réel tel que $x+h>0$ ou tel que $x+h \geqslant 0$...

Posons $\Delta(h) = f(x+h) - f(x) + h\,g(x)$. $\Delta(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} + h \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}$.

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{(x+e^t)^2 - (x+h+e^t)(x+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \right) \mathrm{d}t.$$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{(x+e^t)^2 - (x+e^t)^2 - h\,(x+e^t) + h\,(x+e^t) + h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \right) \mathrm{d}t = h^2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}.$$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ x+h+e^t \geqslant e^t > 0$ et $(x+e^t)^2 \geqslant e^{2t} > 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ (x+h+e^t)(x+e^t)^2 \geqslant e^{3t} > 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leqslant \dfrac{1}{e^{3t}} = e^{-3t}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{3}$ d'après **Q1**. Ainsi :

$$0 \leqslant \Delta(h) = h^2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leqslant h^2 \int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{3} \text{ car } h^2 \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant +\infty\,!$$

Donc $0 \leqslant \Delta(h) \leqslant \dfrac{h^2}{3}\cdot$ Ce qui donne encore $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{h^2}{3}$ ou $|f(x+h)-f(x)+h\,g(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{3}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall h \in \mathbb{R},\ x+h \geqslant 0 \Rightarrow |f(x+h)-f(x)+h\,g(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}\cdot}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall h \in [-x,+\infty[,\ |f(x+h)-f(x)+h\,g(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{3} = \dfrac{|h|^2}{3}\cdot$

Alors $\forall h \in [-x,+\infty[-\{0\},\ \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)+h\,g(x)}{h}\right| \leqslant \dfrac{|h|}{3}\cdot$

Donc $\forall h \in [-x,+\infty[-\{0\},\ 0 \leqslant \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \big(-g(x)\big)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{3}$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{3} = 0.$

Ainsi par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -g(x).$

Ce qui montre que f est dérivable en x et que $f'(x) = -g(x)$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -g(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}\cdot}$$

8. Ici encore nous travaillerons sur $\mathbb{R}_+$. Nous poserons donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = x\,f(x)$.

f et $x \to x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc par produit T est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$$T'(x) = f(x) + x\,f'(x) = f(x) - x\,g(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{x+e^t-x}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$T'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty}\int_0^{z}\frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+e^t}\right]_0^z = \lim_{z\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+e^z}+\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}\cdot$$

$$\boxed{T \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ T'(x) = \frac{1}{x+1}\cdot}$$

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle il existe une constante c telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln|x+1| + c$.

Alors $c = 0 + c = \ln|0+1| + c = T(0) = 0 \times f(0) = 0 \times 1 = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln|x+1| = \ln(x+1)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln(x+1).}$$

Remarque En étant conforme au texte et en travaillant sur $]0,+\infty[$ *on montrait que* $c=0$ *en faisant tendre* x *vers* 0 *et en utilisant la continuité de* f *en* 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x\,f(x) = T(x) = \ln(x+1)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.}$$

Remarque Résultat que nous avons obtenu en une ligne dans Q6. b. Mais pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ?!

♣ *Exercice Retrouver la dérivabilité de* f *en* 0.