EDHEC 1994 exercice 1

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,t^n\,\mathrm{d}t$$

Q1 Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

On fait Q2'

Q2 a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

Q2' n est dans $\mathbb{N}$. Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

Q3 a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$ K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

Q4 On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

EDHEC 2002 exercice 2

1) a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 (1-\ln t)\,dt$ converge et donner sa valeur.

b. Montrer que $\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt$ converge pour tout x strictement positif.

On pose alors : $\begin{cases} \forall x>0,\ F(x)=\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt \\ F(0)=0. \end{cases}$

c. Montrer que F est continue en 0.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner ses variations (la limite de F en $+\infty$ n'est pas demandée).

2) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=F(u_n)$.

a. Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.

b. Montrer que $u_0 \geq u_1$ puis déterminer par récurrence les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout x de $[0,1]$, on pose : $g(x)=F(x)-x$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel β de $]0,1]$ tel que $g'(\beta)=0$, puis donner les variations de g.

b. En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de $]\beta,1]$ tel que $g(\alpha)=0$.

4) a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

EDHEC 2003 exercice 2

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p,+\infty[$ et telle que $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1) a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,dt$.

b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que :

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3) Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).

b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

c. La série de terme général R_n est-elle convergente ?

EDHEC 2004 exercice 2

Q1 On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$.

Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$ (JF on justifiera avec précision les équivalents proposés).

Q2 Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q3 a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}$.

b) Pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[1, +\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

c) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Q4 a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

Q5 Dresser le tableau de variation de f.

EDHEC 2007 exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \geq \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

b) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leq I$.

c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

EDHEC 2009 exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1) a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.
   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{1}{k\alpha})$.

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.
   b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})\right]$.
   c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \dfrac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \dfrac{1}{k})$.
   d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.
Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de u_n :

```
Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1)   then  u : = ------
             else  u : = ------ ;
end ;
```