EDHEC 1994 exercice 1

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, t^n\,\mathrm{d}t$$

Q1 Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

On fait Q2'

Q2 a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

Q2' n est dans $\mathbb{N}$. Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

Q3 a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$ K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

Q4 On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

(Q1) Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$. f_α est continue sur $]0,+\infty[$.

$f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 \times \frac{t}{t} = 1$. Alors $\lim_{t\to 0} f_\alpha(t) = 1$. Donc f_α est prolongeable par continuité en 0.

Alors $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge. Or $\forall t \in]0,1]$, $f_\alpha(t) \geqslant 0$ donc $\int_0^1 |f_\alpha(t)|\,dt$ converge.

Remarque.. Nous noterons dans la suite $\hat{f}_\alpha$ le prolongement par continuité de f_α à 0.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $\hat{f}_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$.

croissance comparée

$\forall t \in [1,+\infty[$, $|t^2 f_\alpha(t)| = t^2 e^{-\alpha t}\frac{|\sin t|}{t} = te^{-\alpha t}|\sin t| \leqslant te^{-\alpha t}$ et $\lim_{t\to+\infty}(te^{-\alpha t}) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha t}{e^{\alpha t}}\right) = 0$

Alors par encadrement $\lim_{t\to+\infty} |t^2 f_\alpha(t)| = 0$ ou $\lim_{t\to+\infty} t^2|f_\alpha(t)| = 0$.

Ainsi 1/ $|f_\alpha(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2/ $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f_\alpha(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$.

3/ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |f_\alpha(t)|\,dt$.

Finalement $\int_0^{+\infty} |f_\alpha(t)|\,dt$ converge. Alors $\int_0 f_\alpha(t)\,dt$ est absolument convergente.

Remarque.. Notons qu'alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ est convergente.

(Q2) Version 1.. Celle du texte.

a) $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall A \in [0,+\infty[$, $\int_0^A e^{-\alpha t}\,dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^A = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha A})$.

Alors $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

I_0 existe et $I_0 = \frac{1}{\alpha}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que I_{n-1} converge.

$u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-\alpha t}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A t^n e^{-\alpha t} dt = [t^n(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t})]_0^A - \int_0^A n t^{n-1}(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}) dt = -\frac{1}{\alpha} A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Or $\lim_{A\to+\infty}(A^n e^{-\alpha A}) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}\frac{(\alpha A)^n}{e^{\alpha A}}\right) \underset{\alpha>0\,!}{=} 0$ par croissance comparée.

Nous avons supposé que I_{n-1} converge.

Alors $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt\right) = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Donc $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}dt$ converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt$ ou $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.

<u>Si $n\in\mathbb{N}^*$ et si I_{n-1} est convergente alors I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.</u>

c) <u>Remarque</u>. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{(n-1)!}\alpha^{n-1} I_{n-1}$.

Donc $\left(\frac{1}{n!}\alpha^n I_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{0!}\alpha^0 I_0 = I_0 = \frac{1}{\alpha}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. Fin de la remarque !

Montrons alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ... par récurrence.

→ C'est clair pour $n=0$ d'après a)

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour n.

Par hypothèse I_{n-1} converge et vaut $\frac{(n-1)!}{\alpha^{(n-1)+1}}$. b) montre alors que

I_n converge et que $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$

donc I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

<u>Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.</u>

<u>Version 2</u>. Utilisation de Γ qui n'était pas au programme en 1993.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $t \mapsto e^{-\alpha t} t^n$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$t\mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Cela justifie le changement de variable $u=\alpha t$ dans ce qui suit.

$\forall A\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^A e^{-\alpha t}\, t^n\, dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{\alpha A} e^{-u}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha}\, du = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u}u^n\, du.$

Or $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{(n+1)-1}\,du$ converge et vaut $((n+1)-1)!$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u}u^n\,du$ converge et vaut $n!$

$\alpha>0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}(\alpha A)=+\infty$

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A e^{-\alpha t}t^n\,dt\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u}u^n\,du\right) = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\times n! = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$

Donc $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}t^n\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q3 a) Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=\sin x$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\times\frac{\pi}{2}\right)$ (récurrence simple...)

En particulier $\forall k\in\mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(0)=\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)$. Soit $n\in\mathbb{N}$

En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n+1$ en 0, il vient :

$\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(x-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right| \leq \frac{|x-0|^{2n+2}}{(2n+2)!}\max_{t\in[0,x]}\left|\varphi^{(2n+2)}(t)\right|$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\max_{t\in[0,x]}\left|\sin\left(t+k\times\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Notons que si k est pair : $\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\sin\frac{\pi}{2}=(-1)^k.$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ou

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\,]0,+\infty[$ en multipliant l'inégalité précédente par $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right|$

il vient : $\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}e^{-\alpha x}x^{2k}\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right|=\frac{1}{(2n+2)!}e^{-\alpha x}x^{2n+1}$

donc $\left|\hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $\varphi(x) = \hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$

Nous venons de voir que $\forall x \in]0,+\infty[$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Or $\hat{f}_\alpha$ vaut 1 en 0 de même que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$. Alors l'inégalité précédente vaut
OK?
encore pour $x = 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$ or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$. Alors :

1) $\int_0^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ est absolument convergente donc convergente, ce qui n'est pas un scoop !

2) $\left|\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi(x)| dx$

3) $\int_0^{+\infty} |\varphi(x)| dx \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$.

4) $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right] dx$ ou

$\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{2k} dx$ car toutes les intégrales convergent, ou encore $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}$.

Alors $\left|I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ ou

$\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

__Remarque__ .. Nous oublierons pudiquement le K qui est du KK ...

c] $\forall n\in\mathbb{N},\ \left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} \right| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} \times \frac{(2n+1)!}{\alpha^{2n+2}} = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+2} \underset{\uparrow\ \alpha \geqslant 1}{\leqslant} \frac{1}{2n+2}.$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}.$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ \left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2n+2}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$. Donc par encadrement

il vient $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}} = I}}$ ou $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right) = I}}$.

__Remarque__.. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

(Q4) a] $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \underset{\uparrow\ -t^2 \neq 1}{=} \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$ ← ou n !

$\underline{\underline{\text{Alors } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.}}$

b] Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1]$. Intégrons l'égalité précédente entre 0 et x.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\, dt - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$

donc $\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \underset{x\geqslant 0}{\leqslant} \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$

$\forall t\in[0,x],\ t^{2n+2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc $\forall t\in[0,x],\ \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}.$

Alors $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\, dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ car $x\in[0,1]$.

Ainsi $\underline{\underline{\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| \leqslant \frac{1}{2n+3} \text{ et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout}}}$

$\underline{\underline{x \text{ dans } [0,1]}}$

$\mathbb{N}^*$ si vous voulez faire plaisir au concepteur.

Remarque. - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$. Alors par encadrement il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x) \ldots \text{ pour tout } x \text{ dans } [0,1]$$

Donc pour tout x dans $[0,1]$ la série de terme général $(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$. Par imparité ceci vaut encore pour tout $x\in[-1,1]$.

Pour $x = 1$ on retrouve un résultat classique : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\ldots$

c) $$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,\alpha^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1/\alpha)^{2n+1}}{2n+1} = \arctan\frac{1}{\alpha}. \qquad \boxed{I = \arctan\frac{1}{\alpha}.}$$

Remarque de Q3 c)

Remarque précédente ($1/\alpha \in [0,1]$).

$$\forall \alpha\in[1,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{t}\,dt = \arctan\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha$$

au cours ($\alpha > 0$).

EDHEC 2002 exercice 2

1) a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 (1-\ln t)\,dt$ converge et donner sa valeur.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt$ converge pour tout x strictement positif.

On pose alors : $\begin{cases} \forall x>0,\ F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt \\ F(0)=0. \end{cases}$

c. Montrer que F est continue en 0.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner ses variations (la limite de F en $+\infty$ n'est pas demandée).

2) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=F(u_n)$.

a. Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

b. Montrer que $u_0 \geq u_1$ puis déterminer par récurrence les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout x de $[0,1]$, on pose : $g(x)=F(x)-x$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel β de $]0,1]$ tel que $g'(\beta)=0$, puis donner les variations de g.

b. En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de $]\beta,1]$ tel que $g(\alpha)=0$.

4) a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

1) a. Posons : $\forall t \in]0,1],\ h(t) = 1 - \ln t$. h est continue sur $]0,1]$.

Soit ε un élément de $]0,1]$. Une intégration par parties simple donne (avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = 1 - \ln t$...) :
$$\int_\varepsilon^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = [t(1-\ln t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t\left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 1-\varepsilon\,(1-\ln\varepsilon)+\int_\varepsilon^1 1\,\mathrm{d}t = 1-\varepsilon+\varepsilon\,\ln\varepsilon+1-\varepsilon = 2-2\varepsilon+\varepsilon\,\ln\varepsilon.$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\,\ln\varepsilon) = 0$ donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\displaystyle\int_\varepsilon^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = 2$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 2}.$$

b. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ \ell(t) = \dfrac{1-\ln t}{2+t^2}\cdot$ ℓ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit t un élément de $]0,1]$. $2 \leqslant 2+t^2$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

Comme $1-\ln t$ est positif il vient : $0 \leqslant \ell(t) \leqslant \dfrac{1}{2}(1-\ln t)$. $(*)$

$\forall t \in]0,1],\ \boxed{0 \leqslant}\ \ell(t) \leqslant \dfrac{1}{2}(1-\ln t)$ et $\displaystyle\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t$ existe donc $\displaystyle\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$ existe également.

De plus $\displaystyle\int_1^x (1-\ln t)\,\mathrm{d}t$ existe, pour tout réel x strictement positif car ℓ est continue sur $]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout réel } x \text{ strictement positif}}.$$

Remarque *En intégrant l'inégalité* $(*)$ *on obtient :* $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = 1$. *Nous en reparlerons...*

c. $\displaystyle\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\displaystyle\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

Ceci donne encore, grâce à Chasles, $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_0^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue en } 0}.$$

d. ℓ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit L la primitive de ℓ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = F(1) + L(x) - L(1) = F(1) + L(x)$.

L est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée ℓ est continue sur cet intervalle. Ainsi L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Comme $x \to F(1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, car c'est une fonction constante, on peut alors dire que :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}.$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = F(1) + L(x)$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = L'(x) = \ell(x) = \dfrac{1-\ln x}{2+x^2}\cdot$

Le signe de F' sur $]0,+\infty[$ est celui de la fonction $x \to 1 - \ln x$.

Alors F est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } [0, e] \text{ et strictement décroissante sur } [e, +\infty[.}$$

2) a. Commençons par montrer que $[0, 1]$ est stable par F.

Comme F est croissante sur $[0, 1]$, $F([0, 1]) \subset [F(0), F(1)] = [0, F(1)]$.

Or, comme nous l'avons remarqué plus haut, $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \ln t}{2 + t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \ln t)\, dt = 1$.

Alors $F([0, 1]) \subset [0, F(1)] \subset [0, 1]$. Ainsi $[0, 1]$ est stable par F.

Pour plus de précautions, montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et appartient à $[0, 1]$.

• u_0 valant 1, la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

u_n est un élément de $[0, 1]$ alors $u_{n+1} = F(u_n)$ est défini et appartient à $F([0, 1])$. Comme $F([0, 1]) \subset [0, 1]$, u_{n+1} appartient à $[0, 1]$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ est défini et appartient à } [0, 1]}.$$

b. u_1 appartient à $[0, 1]$ et $u_0 = 1$ donc $\boxed{u_0 \geqslant u_1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \geqslant u_1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

$u_n \geqslant u_{n+1}$. Mieux $1 \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$ et F est croissante sur $[0, 1]$, donc $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant F(u_{n+1}) = u_{n+2}$. $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}.\ (u_n)_{n \geqslant 0} \text{ est décroissante.}}$$

c. $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc :

$$\boxed{(u_n)_{n \geqslant 0} \text{ est convergente}}.$$

3) a. g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$.

$\forall x \in]0, 1],\ g'(x) = F'(x) - 1 = \dfrac{1 - \ln x}{2 + x^2} - 1 = \dfrac{-1 - \ln x - x^2}{2 + x^2}$.

Posons : $\forall x \in]0,1],\ \varphi(x) = -1 - \ln x - x^2$. φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1],\ \varphi'(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x$.

φ' est strictement négative sur $]0,1]$ donc φ est strictement décroissante sur $]0,1]$.

Notons que $\varphi(1) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

φ est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. φ définit une bijection de $]0,1]$ sur l'intervalle $[-2,+\infty[$. Comme 0 appartient à $[-2,+\infty[$, il existe un unique élément β appartenant à $]0,1]$ (et même à $]0,1[$) tel que $\varphi(\beta) = 0$.

Rappelons que $\forall x \in]0,1],\ g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2+x^2}$. Alors :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \beta \text{ de }]0,1] \text{ tel que } g'(\beta) = 0}.$$

φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ et nulle en β.

Alors φ est strictement positive (resp. négative) sur $]0,\beta[$ (resp. $]\beta,1]$).

De plus g' est du signe de φ sur $]0,1]$ et g est continue sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0,\beta] \text{ et strictement décroissante sur } [\beta,1]}.$$

b. g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\beta,1]$ donc g définit une bijection de $]\beta,1]$ sur l'intervalle $[g(1), \lim\limits_{x \to \beta^+} g(x)[= [g(1), g(\beta)[$.

$g(1) = F(1) - 1 \leqslant 0$. De plus g est strictement croissante sur $[0,\beta]$ et $g(0) = F(0) - 0 = 0$ donc $g(\beta) > 0$.

Ainsi 0 est élément de l'intervalle $[g(1), g(\beta)[$. Alors :

$$\boxed{\text{Il existe un unique élément } \alpha \text{ de }]\beta,1] \text{ tel que } g(\alpha) = 0}.$$

4) a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \alpha$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1 \geqslant \alpha$.
- Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$ on ait $u_n \geqslant \alpha$.

Alors $1 \geqslant u_n \geqslant \alpha \geqslant 0$. Comme F est croissante sur $[0,1]$ on a : $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant F(\alpha) = \alpha$ (en effet $F(\alpha) - \alpha = g(\alpha) = 0$). La propriété est vraie pour $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \alpha}$$

b. Notons γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \geqslant u_n \geqslant \alpha$, γ est alors élément de $[\alpha,1]$ donc de $]\beta,1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \gamma$ et F est continue en γ donc $F(\gamma) = \gamma$ ou $g(\gamma) = 0$.

γ est donc un élément de $]\beta, 1]$ tel que $g(\gamma) = 0$; d'après 3) b $\gamma = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}.$$

EDHEC 2003 exercice 2

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p,+\infty[$ et telle que $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1) a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,dt$.

b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que :

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3) Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).

b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

c. La série de terme général R_n est-elle convergente ?

1) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$. Supposons d'abord que $n > p$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p, n-1]\!]$, $f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que ceci vaut encore pour $n = p$ car $S_p - f(p) = 0$ et $\displaystyle\int_p^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ S_n - f(p) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et f est positive sur $[p, +\infty[$. Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $S_n \leqslant f(p) \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $f(n)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(p) + \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ converge.}}$$

Remarque Ceci est en fait un résultat de cours dans la mesure où f est continue positive et dcroissante sur $[p, +\infty[$.

2) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\forall q \in [\![n, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{q} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{q} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{q} f(k)$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ ou $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + f(n)$.

Alors $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. Soit n un élément de $[\![p, +\infty[\![$. f est strictement positive sur $[p, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

En divisant l'encadrement précédent par $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ il vient : $1-\dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant \dfrac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant 1.$

Le théorème d'encadrement sur les suites nous indique alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}=1 \text{ dès que } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\right)=1 \text{ ou que } \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}=0.$$

Ainsi $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dès que $f(n)=o\left(\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$$\boxed{f(n)=o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ est une condition suffisante pour que } R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

3) a. $x\to x$ et $x\to(\ln x)^2$ sont continues et strictement positives sur $[2,+\infty[$ donc $x\to x(\ln x)^2$ est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$. Alors f est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$.

$x\to x$ et $x\to(\ln x)^2$ sont croissantes et strictement positives sur $[2,+\infty[$ donc $x\to x(\ln x)^2$ est croissante et strictement positive sur $[2,+\infty[$. Alors f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

$$\forall A\in[2,+\infty[,\ \int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t=\int_2^A\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}=\left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A=-\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln 2}.$$

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln 2}$. Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\ln 2}$.

$$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \lim_{A\to+\infty}\int_n^A f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln t}\right]_n^A=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{\ln n}.$$

Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln n}$.

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n(\ln n)^2}}{\frac{1}{\ln n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln n}=0.$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est continue, strictement positive, et décroissante sur } [2,+\infty[. \\ \text{De plus } \displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } f(n)=o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array}}$$

b. D'après la question 2, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln n}$.

$$\boxed{R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln n}.}$$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,R_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right)=+\infty$; il existe alors n_0 dans $[\![2,+\infty[\![$ tel que $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ n\,R_n\geqslant 1$.

Alors $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ R_n\geqslant\dfrac{1}{n}\geqslant 0$. La divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général R_n diverge.

$$\boxed{\text{La série de terme géral } R_n \text{ diverge.}}$$

EDHEC 2004 exercice 2

Q1 On pose, lorsque c'est possible, $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$.

Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$ (JF on justifiera avec précision les équivalents proposés).

Q2 Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q3 a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}$.

b) Pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $[1,+\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t}-\dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad g(x)=\dfrac{\ln 2}{x}$.

c) En déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

Q4 a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant\dfrac{\ln 2}{x}-f(x)\leqslant\dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

Q5 Dresser le tableau de variation de f.

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [1, +\infty[$, $g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\cdot$ g_x est continue sur $[1, +\infty[$. Envisageons deux cas.

• Supposons x strictement positif.

$\forall t \in [1, +\infty[$, $1 + t + t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}\cdot$

Comme $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$.

• Supposons x négatif ou nul.

Comme $x + 1 \leqslant 1$, $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^{x+1} \leqslant t$ donc $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 < 1 + t + t^{x+1} \leqslant 1 + t + t \leqslant t + t + t = 3\,t$.

Alors $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{3\,t} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} = g_x(t)$.

La divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3\,t}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$.

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt$ converge si et seulement si x est strictement positif.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]0, +\infty[.}$$

Remarque   On pouvait également obtenir le résultat en montrant que :

$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\,t} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{t^{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2) Montrons que f est croissante en utilisant la définition.

Soient deux éléments x et y de $]0, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $f(y) \leqslant f(x)$.

Soit t un élément de $[1, +\infty[$. $\ln t \geqslant 0$ et $x \leqslant y$ donc $(x + 1)\ln t \leqslant (y + 1)\ln t$.

Alors $t^{x+1} = e^{(x+1)\ln t} \leqslant e^{(x+1)\ln t} = t^{y+1}$ donc $0 < 1 + t + t^{x+1} \leqslant 1 + t + t^{y+1}$.

Ainsi $\dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\cdot$

Finalement : $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\cdot$

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$, c'est à dire : $f(y) \leqslant f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

3) a. Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ h_x(t) = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$. h_x est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,(1+t^x) = t + t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant h_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

Comme $x+1>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0,+\infty[, \text{ la quantité } g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} \text{ existe.}}$$

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x} = \dfrac{1+t^x-t^x}{t\,(1+t^x)} = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1}{t\,(1+t^x)}.}$$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Soit A un élément de $[1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln|t| - \frac{1}{x}\ln|1+t^x|\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[x\ln t - \ln(1+t^x)\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t^x}{1+t^x}\right]_1^A.$$

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{1}{x}\left(\ln\frac{A^x}{1+A^x} - \ln\frac{1}{2}\right) \quad (**).$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^x}{1+A^x} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{A^x}} = 1$ Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\frac{A^x}{1+A^x} = 0$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (**) il vient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = -\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{\ln 2}{x}.}$$

c. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+t+t^{x+1} \geqslant t+t^{x+1} = t\,(1+t^x) > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$.

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient : $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x}.}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$, l'encadrement précédent donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4) a. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t\,(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}.$$

Soit t un élément de $[1,+\infty[$.

$t \geqslant t > 0$, $1+t^x \geqslant t^x > 0$ et $1+t+t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1}) \geqslant t\,t^x\,t^{x+1} = t^{2\,x+2} > 0$.

Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1}) \geqslant t^{2\,x+2} > 0$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})} \leqslant \dfrac{1}{t^{2x+2}}$. (***)

Observons que $2x+2 > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}}$ converge. De plus :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{(2x+1)\,t^{2x+1}}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{(2x+1)\,A^{2x+1}} + \frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2x+1}.$$

Alors en intégrant l'encadrement (***) (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient :

$0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})} \leqslant \frac{1}{2x+1}$. Ce qui donne $0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}.}$$

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$. Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \ln 2 - x\,f(x) \leqslant \dfrac{x}{2x+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x}{2x+1} = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \big(x\,f(x)\big) = \ln 2$.

Comme $\ln 2$ n'est pas nul, $x\,f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln 2$ et donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}$.

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln 2}{x} = +\infty$ donne alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty.}$$

5) f est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Je vous laisse le tableau...

EDHEC 2007 exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \le w_n \le \dfrac{1}{e}$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \ge \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

b) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \le I$.

c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $f_n : x \to \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $x+\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$.

En multipliant par e^{-x} qui est positif on obtient : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant n\,e^{-x}$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant n\,e^{-x}$. De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente puisque la fonction Γ est définie en 1 ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$ est défini(e).

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ converge également.

Soit x un élément de $[1,+\infty[$. $x+\dfrac{1}{n} \geqslant x \geqslant 1$. Ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant 1$.

En multipliant par e^{-x} qui est positif on obtient : $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$.

Par conséquent : $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$.

Alors $\forall A \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-e^{-x}\big]_1^A = e^{-1} - e^{-A} \leqslant e^{-1}$.

Donc $\forall A \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e}\cdot$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient : $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{e}\cdot}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit x un élément de $[0,1]$. $e^{-1} \leqslant e^{-x}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ donc $\dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\cdot$

$\forall x \in [0,1],\ \dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\cdot$ En intégrant $(0 \leqslant 1\,!)$ on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi $\dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} = \left[\ln\left|x+\frac{1}{n}\right|\right]_0^1 = \ln\left|1+\frac{1}{n}\right| - \ln\left|\frac{1}{n}\right| = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln n = \ln(n+1)$ (résultat que nous réutiliserons dans 3) c)).

Finalement : $\displaystyle\frac{1}{e}\ln(n+1) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = v_n.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1).}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $v_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$ et $w_n \geqslant 0$ donc $u_n = v_n + w_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e}\ln(n+1) = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Remarque *On a également :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$

3) a) $g : x \to \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$ ou $1 - e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Finalement g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne très largement la convergence de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}t \text{ est une intégrale convergente.}}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $x \to \dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0,1]$.

Soit x un élément de $]0,1]$. $x + \dfrac{1}{n} \geqslant x > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ De plus $0 < 1 - e^{-x}$.

Par conséquent : $0 \leqslant \dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1-e^{-x}}{x}\cdot$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}t$ existent on obtient en intégrant ($0 \leqslant 1$!) :

$\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant I.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1) - v_n$ (d'après le résultat obtenu dans Q2 b).

Donc $0 \leqslant \ln(n+1) - v_n \leqslant I$ ou $\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1).}$$

d) Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a alors $u_n = v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) > 0$ et $\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1)$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \dfrac{I}{\ln(n+1)} \leqslant \dfrac{v_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{I}{\ln(n+1)}\right) = 1$. Il vient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\ln(n+1)} = 1$.

Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0 \times 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Ainsi : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Finalement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

EDHEC 2009 exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1) a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{k\alpha})$.

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right]$.

c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.

Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de u_n :

```
Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1)    then  u : = ------
              else  u : = ------ ;
end ;
```

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$t \to \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ est alors de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

- $\dfrac{1}{1+t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$.
- $t \to \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ est positive sur $[1,+\infty[$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha n}}$ converge car $\alpha n > 1$ puisque $n \geqslant 1$ et $\alpha > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ converge et u_n est défini.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} > 0$ donc $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 1+t^\alpha \geqslant 1$ et $n+1 \geqslant n$. Donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ (1+t^\alpha)^{n+1} \geqslant (1+t^\alpha)^n > 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$. Ceci donne en intégrant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

Alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif.

Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ f(t) = t$ et $g(t) = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$.

f et g sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. De plus $\forall t \in [0,+\infty[,\ f'(t) = 1$ et $g'(t) = -n\,\alpha\,\dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$. En intégrant par parties il vient :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \int_0^A 1 \times \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t = \left[t \times \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^A - \int_0^A t\left(-n\,\alpha\,\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha\int_0^A \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha\int_0^A \frac{(1+t^\alpha)-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} - n\,\alpha\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \quad (1).$$

Notons que : $\dfrac{A}{(1+A^\alpha)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{A^{\alpha n}} = \dfrac{1}{A^{\alpha n-1}}$.

Comme $\alpha n - 1$ est strictement supérieur à 0 ($n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 1$), $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha n-1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} = 0$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$ convergent, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1) on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = n\,\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} - n\,\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$. Ainsi $u_n = n\,\alpha\, u_n - n\,\alpha\, u_{n+1} = n\,\alpha\,(u_n - u_{n+1})$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,\alpha\,(u_n - u_{n+1}).}$$

b) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = k\,\alpha\,(u_k - u_{k+1})$ donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_{k+1} = \left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) u_k$.

On a encore $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right)$ car $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k > 0$.

Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ ce qui donne $\displaystyle\frac{u_n}{u_1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ ou encore $\displaystyle u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2, on a } u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right).}$$

3) Rappelons que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs divergente tend vers $+\infty$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \ln u_n = \ln u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ car $u_1 > 0$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ 1 - \dfrac{1}{k\,\alpha} > 0$.

- $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{k\,\alpha}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \geqslant 0$.
- La série de terme général $\dfrac{1}{k\,\alpha}$ est divergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right)$ est divergente. Cette série étant à termes positifs la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right) = -\infty$.

Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)\right) = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\ln u_n} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,(u_k - u_{k+1})\big) = \sum_{k=1}^{n} (k\,\alpha\, u_k) - \sum_{k=1}^{n} (k\,\alpha\, u_{k+1})$.

Un petit changement d'indice sur la seconde somme donne :

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (k\,\alpha\, u_k) - \sum_{k=2}^{n+1} ((k-1)\,\alpha\, u_k) = \sum_{k=1}^{n} (k\,\alpha\, u_k) - \sum_{k=1}^{n+1} ((k-1)\,\alpha\, u_k)$.

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(k\,\alpha\, u_k - ((k-1)\,\alpha\, u_k)\Big) - n\,\alpha\, u_{n+1} = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k - n\,\alpha\, u_{n+1} = \alpha\, S_n - n\,\alpha\, u_{n+1}$.

Alors $(\alpha-1)\,S_n = n\,\alpha\,u_{n+1}$. Comme α est différent de $1 :$ $S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_{n+1}.}$$

b) Soit n dans $[\![2,+\infty[\![$. $S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_{n+1} = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_1\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

$S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\,u_1\,\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = n\,u_1\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

Alors $\ln(S_n) = \ln n + \ln u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = \ln u_1 + \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) + \ln n$.

Observons alors que $n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}$. Ainsi $\ln n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = -\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Ainsi $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].}$$

c) $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) = -\dfrac{1}{k\,\alpha} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{1}{k\,\alpha} + \dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$. Comme $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ n'est pas nul :

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{1}{k}.}$$

d)
- $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k} \geqslant 0$.
- la série de terme général $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k}$ est divergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ diverge.

$\alpha > 1$ donc $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{1}{k\,\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k}$. Alors $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ 1-\dfrac{1}{k\,\alpha} \geqslant 1-\dfrac{1}{k} > 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \geqslant \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$. Finalement $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0$.

La série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ diverge et est à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(S_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\right) = +\infty$.

Ceci donne encore $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln S_n} = +\infty$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ diverge.}}$$

5) Ici $\alpha = 2$. $u_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \Big[\arctan t\Big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n}\right) u_n$ ou $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2\,(n-1)}\right) u_{n-1}$.

```
Function u(n:integer):real;
Begin
If (n=1) then u:=pi/2
          else u:=(1-0.5/(n-1))*u(n-1);
end;
```