

3. PROBLEME.

On rappelle que :

- La fonction Γ est la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$$

- Si X suit une loi normale et si α est un réel non nul alors αX suit également une loi normale.

On admettra que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3.1.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$, où X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$.
2. En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.

3. Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $(2, \frac{n}{2})$.
4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n .
5. On dit alors que Y_n suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$.
Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0, 1[$.
Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$

Dans la suite du problème on considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (3.2) puis une estimation par intervalle de confiance (3.3 et 3.4) de la variance σ^2 .

Si g est une fonction de n variables réelles, et que $Z_n = g(X_1, \dots, X_n)$, on rappelle que :

- g est un estimateur de θ (Z_n est un estimateur de θ) lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit sans biais lorsque pour tout n entier naturel non nul :

$$E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit convergent lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Z_n) = 0$$

3.2. Estimation ponctuelle de σ^2 .

Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2$$

1. Montrer que $(F_n)_{n \geq 1}$ est un estimateur convergent sans biais de m .
2. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

puis que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

b. Prouver que :

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

c. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 .

3.3. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant connue.

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \text{ et } T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

1. Justifier que U_n suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté.
2. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right] \text{ et } \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right]$$

En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$ est $1 - \alpha$.

3.4. Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant inconnue.

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de \mathbb{R}^n .

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

1. Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique est A définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } \begin{cases} a_{ii} = n - 1 \\ a_{ij} = -1 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et B la matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

- Justifier que A est une matrice diagonalisable.
- Calculer le produit AB , en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.
- Montrer que :

$$\dim \text{Im}(\varphi - n\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

- En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi - n\text{Id}_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .

- Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à

la valeur propre n . Prouver que : $\sum_{i=1}^n w_i = 0$.

- Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que :

$$P^{-1}AP = D \text{ avec } {}^tP = P^{-1}$$

(On ne demande pas la matrice P).

- On note $(p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ les coefficients de la matrice tP , montrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$$

puis que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1$$

2. Soit q l'application de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = {}^t X M X \text{ où } M = \frac{1}{n} A$$

a. On pose $Y = {}^t P X$, montrer que :

$$q(X) = \frac{1}{n} Y D Y$$

puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n} Y D Y$, montrer que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$$

3. Pour tout i de l'ensemble $\{1, \dots, n-1\}$ on pose :

$$Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j$$

a. Justifier que Y_i suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b. En utilisant les résultats de la question 3.4.2, montrer que :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$$

c. En admettant que les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du *Chi-deux* à $n-1$ degrés de liberté.

d. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right] \text{ et } \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right]$$

sont égaux.

e. En déduire que la probabilité de l'événement :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

est $1 - \alpha$.