<u>Exercice 1.-</u> Q1.. a] Montrons d'abord que si $f \in E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, alors $g = \varphi(f) \in E$

Soit donc $f \in E$. Posons $g = \varphi(f)$.

$x \mapsto \int_x^{2x-a} f(t)\,dt$ et $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ sont continues sur $\mathbb{R}-\{a\}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

Prouvons que g est continue au point a.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ g(x) = \frac{F(2x-a)-F(x)}{x-a} = 2\,\frac{F(2x-a)-F(a)}{(2x-a)-a} - \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{F(2x-a)-F(a)}{(2x-a)-a} = \lim_{y\to a} \frac{F(y)-F(a)}{y-a} = F'(a).$$ Notons que : $F'(a) = f(a)$.

Finalement $\lim_{x\to a} \frac{F(2x-a)-F(x)}{x-a} = 2f(a)-f(a) = f(a)$; $\lim_{x\to a} g(x) = f(a) = g(a)$; g est continue en a.

Donc g est continue en tout point de $\mathbb{R}$. $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = E$.

Par conséquent : $\forall f \in E,\ \varphi(f) \in E$. φ est donc une application de E dans E.

Montrons que φ est linéaire. Soit $(f,h) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrons que $\varphi(\alpha f+\beta h) = \alpha\varphi(f)+\beta\varphi(h)$; c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\alpha f+\beta h)(x) = \alpha\varphi(f)(x)+\beta\varphi(h)(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

- 1°.. $x \neq a$: $\varphi(\alpha f+\beta h)(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a}(\alpha f+\beta h)(t)\,dt = \alpha\,\frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} f(t)\,dt + \beta\,\frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} h(t)\,dt = \alpha\varphi(f)(x)+\beta\varphi(h)(x)$.

- 2°.. $x = a$: $\varphi(\alpha f+\beta h)(a) = (\alpha f+\beta h)(a) = \alpha f(a)+\beta h(a) = \alpha\varphi(f)(a)+\beta\varphi(h)(a)$.

Ceci achève de prouver la linéarité de φ.

Finalement φ est un endomorphisme de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

<u>b]</u> $f \in E$. $g = \varphi(f)$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto F(2x-a)$, $x \mapsto F(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}-\{a\}$.

Donc g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{a\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ g(x) = \frac{F(2x-a)-F(x)}{x-a} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\Big[(2F'(2x-a)-F'(x))(x-a) - (F(2x-a)-F(x))\Big]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ g'(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\Big[(2f(2x-a)-f(x))(x-a) - \int_x^{2x-a} f(t)\,dt\Big] = \frac{2f(2x-a)-f(x)-g(x)}{x-a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ g'(x) = \frac{2f(2x-a)-f(x)-g(x)}{x-a}.$$

c) $f : t \mapsto |t-a|$. Notons que $f \in E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Posons $g = \phi(f)$.

Soit $x \in]a, +\infty[$. $x > a$ et $2x - a > a$; par conséquent :

$$g(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} (t-a)\,dt = \frac{1}{x-a}\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_x^{2x-a} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-a} \times \left[(2x-2a)^2 - (x-a)^2\right]$$

$$g(x) = \frac{3}{2}(x-a) = \frac{3}{2}|x-a| = \frac{3}{2}f(x)$$

Soit $x \in]-\infty, a[$. $x < a$ et $2x - a < a$; par conséquent :

$$g(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} -(t-a)\,dt = \dots = -\frac{3}{2}(x-a) = \frac{3}{2}|x-a| = \frac{3}{2}f(x)$$

Notons encore que : $g(a) = f(a) = 0 = \frac{3}{2}f(a)$.

Finalement : Si $f : x \mapsto |x-a|$ alors $\phi(f) = \frac{3}{2}f$.

$f : x \mapsto |x-a|$ n'étant pas dérivable en a : $\phi(f)$ ne l'est pas davantage.

d) Rappelons que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = E$ alors $\phi(f)$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$.

Considérons un réel b distinct de a. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |x-b|$.

h est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$ car h n'est pas dérivable en b qui est dans $\mathbb{R} - \{a\}$. Par conséquent $h \in E$ et h n'est pas l'image par ϕ d'un élément de E.

h n'a pas d'antécédent par ϕ dans E

Par conséquent <u>ϕ n'est pas un endomorphisme surjectif</u>.

Q2 a) $u \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 2u(2x-a)$.

Montrons par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = 2^n u(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $u\left(\frac{(2^0-1)a+x}{2^0}\right) = u(x) = 2^0 u(x)$; l'égalité est vraie pour $n=0$.

- Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}}\right) = 2u\left(2 \times \frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}} - a\right) = 2u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a + x - 2^n a}{2^n}\right)$$

$$u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}}\right) = 2u\left(\frac{(2^{n+1}-2^n-1)a+x}{2^n}\right) \underset{2^{n+1}-2^n=2^n}{=} 2u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) \underset{H.R}{=} 2 \times 2^n u(x) = 2^{n+1}u(x)$$

Ceci achève la récurrence.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u(x) = \frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{2^n}\right)a + \frac{x}{2^n}\right) = a$

u étant continue en a : $\lim_{n\to+\infty} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = u(a)$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)\right] = 0 \times u(a) = 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(x) = \frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)$; par conséquent $u(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 0$; u est nulle sur $\mathbb{R}$.

b) Cherchons $\operatorname{Ker} \phi$.

Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$; mieux : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 f(2x-a) - f(x) = 0$

Donc $f \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 f(2x-a) = f(x)$; ce qui précède prouve que f est nulle.

Finalement $\operatorname{Ker} \phi = \{0_E\}$. ϕ est un endomorphisme injectif ... mais pas surjectif.

Q3 a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\phi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} (t-a)^k\,dt = \frac{1}{x-a}\left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1}\right]_x^{2x-a}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\phi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{k+1} \times \left[(2x-a-a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\phi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a}\,\frac{1}{k+1} \times \left[2^{k+1}(x-a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}\right] = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\,\frac{(x-a)^{k+1}}{x-a}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $\phi(d_k)(x) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\, d_k(x)$. Montrons que ceci vaut encore pour $x=a$.

Or $\phi(d_k)(a) = d_k(a)$

2 cas !

$\to k=0$ $\phi(d_k)(a) = d_k(a) \underset{\underset{d_0=1}{\uparrow}}{=} 1 = \frac{2^{0+1}-1}{0+1} = \frac{2^{0+1}-1}{0+1} d_0(a) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k(a)$

$\to k \geq 1$ $\phi(d_k)(a) = d_k(a) = 0 = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} \times 0 = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k(a)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\phi(d_k))(x) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k(x)$

Par conséquent : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi(d_k) = \dfrac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$.

b.. Montrons d'abord que ϕ_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

$(d_0, d_1, \dots, d_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (cours ... Taylor ...)

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} d_k \; ; \quad \phi_n(P) = \phi(P) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \phi(d_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k \in \mathbb{R}_n[X].$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

ϕ étant linéaire sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ est linéaire.

ϕ_n est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

$\mathcal{B}' = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi_n(d_k) = \dfrac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$

$\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de ϕ_n ; ϕ_n est donc un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$A = M_{\mathcal{B}'}(\phi_n) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & & (0) \\ & \alpha_1 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} \text{ pour tout } k \in [\![0,n]\!].$$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$; par conséquent la matrice diagonale A est inversible.

Finalement ϕ_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X^n = (X-a+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} d_k$ (on pouvait aussi utiliser Taylor ... voir plus haut) ;

b) Soit $f \in E$. $\begin{smallmatrix}\leftarrow \text{à faire} \\ \rightarrow \text{dans}\end{smallmatrix}$

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)x^n}_{(1)} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\; x^n = \frac{1}{x-a}\int_a^{2x-a} f(t)\,dt = \phi(f)(x) \overset{\text{par continuité}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R},\, x^n = \phi(f)(x).$$

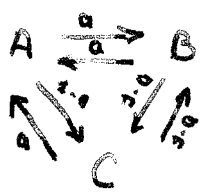
$$(1) \Leftrightarrow \phi(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} \phi(d_k) = \phi\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k\Big).$$

$$(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{injectivité de } \phi}}{\Leftrightarrow} f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k$$

Par conséquent $f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \dfrac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k$ est le seul élément f de $C^0(\mathbb{R})$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_a^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)x^n$.

HEUREUSE PETITE FILLE ! NON ! ALORS CELA NE CHANGE PAS !

Exercice 2 (Q1) .. Soit $n \in \mathbb{N}$.



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}|A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}|B_n)p(B_n) + p(A_{n+1}|C_n)p(C_n)$

$p(A_{n+1}) = 0\,p(A_n) + a\,p(B_n) + 0\,p(C_n)$

De la même manière $p(B_{n+1}) = a\,p(A_n) + 0\,p(B_n) + (1-a)\,p(C_n)$

$p(C_{n+1}) = (1-a)\,p(A_n) + (1-a)\,p(B_n) + 0\,p(C_n)$

Donc $X_{n+1} = \begin{bmatrix} p(A_{n+1}) \\ p(B_{n+1}) \\ p(C_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,p(B_n) + a\,p(C_n) \\ a\,p(A_n) + (1-a)\,p(C_n) \\ (1-a)\,p(A_n) + (1-a)\,p(B_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = MX_n$

__Remarque__.. Le problème était ici presque terminé. En effet posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a b_n + a c_n = a(b_n + c_n) = a[1 - a_n] = -a\,a_n + a \\ b_{n+1} = a\,a_n + (1-a)c_n \\ c_{n+1} = (1-a)(a_n + b_n) = (1-a)(1-c_n) = -(1-a)c_n + 1-a \end{cases}$

$(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites arithmético-géométriques.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x = -ax + a \iff x = \frac{a}{1+a}$ et $x = -(1-a)x + (1-a) \iff x = \frac{1-a}{2-a}$

$\left(a_n - \frac{a}{1+a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-a$ et $\left(c_n - \frac{1-a}{2-a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-(1-a)$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-a)^n\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] + \frac{a}{1+a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{a}{1+a}$ $(|a|<1)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = (a-1)^n\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{1-a}{2-a}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1-a}{2-a}$ $(|a-1|<1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$b_{n+1} = a\,a_n + (1-a)c_n = -(-a)^{n+1}\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] - (a-1)^{n+1}\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{a^2}{1+a} + \frac{(1-a)^2}{2-a}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-a)^n\left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$.

Il est aisé de vérifier que cette formule vaut encore pour $n=0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-a)^n\left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$

Bravo pour le concepteur qui en 4 pages n'arrivera pas à nous donner ce que l'on pouvait obtenir en 1/2 page ([Les résultats sont donnés pour $a = 1/4$!)

Q2 a) $N=\begin{bmatrix}0 & a & 1-a\\ a & 0 & 1-a\\ a & 1-a & 0\end{bmatrix}$; $N\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1-a\\a+1-a\\a+1-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $\underline{\underline{1\in \operatorname{Spec}(N)}}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\underline{\underline{\text{est un vecteur propre de } N}}$.

b) et c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $N-\lambda I_3=\begin{bmatrix}-\lambda & a & 1-a\\ a & -\lambda & 1-a\\ a & 1-a & -\lambda\end{bmatrix}$ cherchons une réduite de Gauss de cette matrice.

$$\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ a & -\lambda & 1-a\\ -\lambda & a & 1-a\end{bmatrix}\xrightarrow[a\neq 0]{}\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & -\lambda-1+a & 1-a+\lambda\\ 0 & +\lambda\frac{1-a}{a}+a & \frac{-\lambda^2}{a}+1-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a\\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2\end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas : } \lambda=a-1}}$

$\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2\end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ par $L_2\leftrightarrow L_3$. Cette matrice n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec un zéro sur la diagonale) donc $N-\lambda I_3$ n'est pas inversible. $\lambda\in\operatorname{Spec} N$

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ cas : } \lambda\neq a-1}}$

$\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a\\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2\end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2\end{bmatrix}$ par $L_2\leftarrow \frac{1}{\lambda+1-a}L_2$

$\begin{bmatrix}a & 1-a & -\lambda\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & t\end{bmatrix}$ avec $t=\lambda(1-a)+a^2-\lambda^2+a-a^2=-\lambda^2+(1-a)\lambda+a$

$t=-(\lambda-1)(\lambda+a)$

Dans ce cas $N-\lambda I_3$ est non inversible ssi $t=0$ soit $\lambda=1$ ou $\lambda=-a$.

IMPORTANT

Notons que dans ce cas $\lambda\neq a-1$ donc $\lambda=1$ exige $a-1\neq 1$, c'est à dire $a\neq 2$ ce qui est !

$\lambda=-a$ exige $a-1\neq -a$ soit $\underline{\underline{a\neq 1/2}}$ ce qui n'est pas toujours !

<u>Conclusion</u>.. $a = \frac{1}{2}$. $\mathrm{Spec}(N) = \{\frac{1}{2} - 1, 1\} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$

$a \neq \frac{1}{2}$ $\mathrm{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$

Notons dans ce dernier cas que $a-1$, 1 et $-a$ sont deux à deux distincts ($a \in]0,1[-\{1/2\}$)

Donc $N \in M_3(\mathbb{R})$ et N a trois valeurs propres distinctes ; N est diagonalisable

Remarquons encore que dans <u>les 2 cas on peut écrire $\mathrm{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$</u>.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $F_\lambda = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid NX = \lambda X\}$.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$\underline{NX = (a-1)X} \Leftrightarrow \begin{cases} ay + (1-a)z = (a-1)x \\ ax + (1-a)z = (a-1)y \\ ax + (1-a)y = (a-1)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x + ay + (1-a)z = 0 & \\ (1-2a)(x-y) = 0 & L_1 - L_2 \\ (1-2a)(x-y) = 0 & L_1 - L_3 \end{cases}$

1er cas.. $a \neq 1/2$. $NX = (a-1)X \Leftrightarrow x = y$ et $x = (a-1)z$

$$\underline{F_{a-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

2e cas.. $a = 1/2$ $NX = (a-1)X \Leftrightarrow NX = (-1/2)X \Leftrightarrow x + y + z = 0$

$$\underline{E_{1/2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}$$

$NX = X \Leftrightarrow \begin{cases} ay + (1-a)z = x \\ ax + (1-a)z = y \\ ax + (1-a)y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + (1-a)z = 0 & \\ (a^2-1)(x-z) = 0 & aL_2 + L_1 \\ (a^2-a+1)(y-z) = 0 & aL_1 + L_3 \end{cases}$

$NX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ -z + az + (1-a)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$. $\underline{F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$.

$NX = -aX \Leftrightarrow \begin{cases} ay + (1-a)z = -ax \\ ax + (1-a)z = -ay \\ ax + (1-a)y = -az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + ay + (1-a)z = 0 \\ ax + ay + (1-a)z = 0 \\ ax + (1-a)y + az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + ay + (1-a)z = 0 & \\ (2a-1)(y-z) = 0 & L_1 - L_3 \end{cases}$

Si $a = 1/2$ $F_{-a} = F_{-1/2}$ déjà fait.

Si $a \neq 1/2$ $NX = -aX \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ ax + z = 0 \end{cases}$ $F_{-a} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}\right)$.

Résumons.. $\underline{\underline{1^{\text{er}} \text{ cas.. } a = 1/2}}$ $\quad \operatorname{Spec}(N) = \{-1/2, 1\}$. $F_{-1/2} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ et $F_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\dim F_{-1/2} + \dim F_1 = 3$

N est diagonalisable

$\underline{\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas.. } a \neq 1/2}}$ $\quad \operatorname{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$

$F_{a-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $F_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $F_{-a} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}\right)$

N est diagonalisable.

<u>Remarque</u>.. dans les deux cas $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de N.

Q3. Soit $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' \\ x - ay + (a-1)z = y' \\ x - ay + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' & \\ (1+a)y = x' - y' & L_1 - L_2 \\ (a-2)z = y' - z' & L_2 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{a+1}(x' - y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y' - z') \\ x = x' - y - (a-1)z \end{cases}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{(a+1)(a-2)}\left[(a+1)(a-2)x' - (a-2)(x'-y') - (a-1)(a+1)(y'-z')\right] = (a)(a-2)x' + (-a^2 + a - 1)y' + (a^2-1)z' \\ y = \frac{1}{a+1}(x' - y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y' - z') \end{cases}$$

Ce qui prouve que P est inversible et que : $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} & \frac{a-1}{a-2} \\ \frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-2} & -\frac{1}{a-2} \end{bmatrix}$

Normal pour une matrice de passage.

Q4 a) P est inversible et les colonnes de P sont des vecteurs propres de N respectivement associés aux valeurs propres 1, $-a$ et $a-1$. P étant inversible ces vecteurs constituent une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. P n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; par conséquent $P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$. Posons $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$. $D = P^{-1}NP$

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}N^nP$ ou $N^n = PD^nP^{-1}$.

b) Supposons $a = 1/4$ $\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 13/35 & 3/7 \\ 4/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & -4/7 & 4/7 \end{bmatrix}$

Notons que $P^{-1} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 7 & 13 & 15 \\ 28 & -28 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$N^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{bmatrix} \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7 & 13 & 15 \\ 28 & -28 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$ avec $\alpha = -1/4$ et $\beta = -3/4$

$$N^n = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^n & -3/4\,\beta^n \\ 1 & -1/4\,\alpha^n & -3/4\,\beta^n \\ 1 & -1/4\,\alpha^n & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 13 & 15 \\ 28 & -28 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28\alpha^n & 13-28\alpha^n+15\beta^n & 15-15\beta^n \\ 7-7\alpha^n & 13+7\alpha^n+15\beta^n & 15-15\beta^n \\ 7-7\alpha^n & 13+7\alpha^n-20\beta^n & 15+20\beta^n \end{bmatrix}$$

Faut-il que les soirées soient longues à LILLE pour prendre son pied avec ce type de calculs !

Par conséquent : $$N^n = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n & 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n \\ 7-7(-1/4)^n & 13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n \\ 7-7(-1/4)^n & 13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n & 15+20(-3/4)^n \end{bmatrix}$$

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Pi^n = {}^tN^n = \dfrac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n & 7-7(-1/4)^n & 7-7(-1/4)^n \\ 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n \\ 15-15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n & 15+20(-3/4)^n \end{bmatrix}$

Q5 a) Ici $X_0 = \begin{bmatrix} p(A_0) \\ p(B_0) \\ p(C_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1} = \Pi X_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n = \Pi^n X_0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = \dfrac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n \\ 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n \\ 15-15(-3/4)^n \end{bmatrix}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $p(A_n) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $p(B_n) = \frac{13}{35} - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ et $p(C_n) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

b) Clairement : $\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = \frac{1}{5}$, $\lim_{n\to+\infty} p(B_n) = \frac{13}{35}$ et $\lim_{n\to+\infty} p(C_n) = \frac{3}{7}$.

Notons que ce résultat ne dépend pas de la position initiale ce qui ne surprendra pas les spécialistes des chaînes de MARKOV... et oui encore !