PARTIE I

Q1.. a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

- Si $k=0$: $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = 0$
- Supposons $k \geq 1$. $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\})}{p(A=k)}$.

$p(A=k) = \dfrac{C_n^k}{2^n}$ ← nombre de parties ayant k éléments de $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ / ← nombre de parties de $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

$p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\}) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n}$ ← nombre de parties ayant k éléments de $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ et contenant a_i

Par conséquent : $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}/2^n}{C_n^k/2^n} = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{k}{n}$

Les deux résultats précédents donnent : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{k}{n}$

b) $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

- Si $k=0$ ou $k=1$: $p(\{X_i=1 \text{ et } X_j=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}\cap\{A=k\})}{p(\{A=k\})} = 0$.
- Supposons $k \geq 2$

$p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})/\{A=k\}) = \dfrac{p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}\cap\{A=k\})}{p(A=k)} = \dfrac{C_{n-2}^{k-2}/2^n}{C_n^k/2^n} = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$ car il

y a C_{n-2}^{k-2} parties de $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ ayant k éléments et contenant a_i et a_j.

Il résulte de ce qui précède que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})/\{A=k\}) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

c) a_i vaut α_i francs et $X_i=1$ si le client achète a_i ; par conséquent :

$S = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$. $\quad S = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$

Q2.. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $(\{A=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$$p(X_i=1) = \sum_{k=0}^n p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\}) = \sum_{k=0}^n p(\{X_i=1\}/\{A=k\})\,p(\{A=k\}) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n}\,p(A=k)$$

A est uniforme sur $\{0,1,\dots,n\}$ donc : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p(A=k) = \dfrac{1}{n+1}$

donc $p(X_i=1) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^n k = \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p(X_i=1) = \dfrac{1}{2}$

Q3 .. $E(S) = E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / 2$.

$\underline{E(S) = (1/2) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

Q4 .. $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

a) $p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \sum_{k=0}^{n} p((\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) / \{A=k\})\, p(\{A=k\})$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n^2-1)} (\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k)$

$= \frac{1}{n(n^2-1)} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{2n+1}{3} - 1 \right]$

$= \frac{1}{2n-2} \left[\frac{2n+1-3}{3} \right] = \frac{1}{3}$

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \frac{1}{3}}$.

b) X_i, X_j et $X_i X_j$ sont des var de Bernoulli donc $E(X_i) = p(X_i=1) = \frac{1}{2}$, $E(X_j) = p(X_j=1) = \frac{1}{2}$

et $E(X_i X_j) = p(X_i X_j = 1) = p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = 1/3$

Donc $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\underline{\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 1/12}$.

$\rho_{X_i X_j} = \frac{\mathrm{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)}$. $V(X_i) = p(X_i=1)\,p(X_i=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. $V(X_j) = \frac{1}{4}$!

$\rho_{X_i X_j} = \frac{1/12}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. $\underline{\rho_{X_i X_j} = \frac{1}{3}}$.

X_i et X_j ne sont pas indépendantes car $\mathrm{cov}(X_i, X_j) \neq 0$.

Q5 .. a) $V(S) = V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(\alpha_i X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(\alpha_i X_i, \alpha_j X_j)$

$V(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \frac{1}{4} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \times \frac{1}{12}$

Rappelons que : $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$ donc $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$

Par conséquent : $V(S) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \frac{1}{12} ((\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2) = \underline{\frac{1}{12} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = V(S)}$

b) $\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha_i = i$ donc $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(S) = \frac{1}{12}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{12}\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{144}(3n^2+3n+8n+4)$

$V(S) = \frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{144}$.

Q6.. $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ a) $f : t \mapsto t^\beta$ est continue sur $[0,1]$ (...ou prolongeable par continuité...)

$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i/n)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (i/n)^\beta\right]$

or $\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\beta+1}$. Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\beta\right] = \frac{1}{\beta+1}$.

$E(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i^\beta$

Or $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\beta \sim \frac{1}{\beta+1}$ donc $\frac{1}{n^{\beta+1}}\sum_{i=1}^n i^\beta \sim \frac{1}{\beta+1}$; $\sum_{i=1}^n i^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$

Par conséquent : $E(S) \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{\beta+1}\,n^{\beta+1}$

b) $V(S) = \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^n i^\beta\right)^2 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n (i^\beta)^2$. Posons $\hat{u}_n = \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^n i^\beta\right)^2$ et

$\hat{v}_n = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n (i^\beta)^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n i^{2\beta}$. $\hat{u}_n \sim \frac{1}{12}\left(\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}\right)^2 = \frac{1}{12(\beta+1)^2}n^{2\beta+2}$ et $\hat{v}_n \sim \frac{1}{6}\,\frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}$

$\frac{\hat{v}_n}{\hat{u}_n} \sim \frac{1}{6(2\beta+1)} \times 12(\beta+1)^2 \times \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\hat{v}_n}{\hat{u}_n}\right) = 0$; $\hat{v}_n = o(\hat{u}_n)$.

ceci donne alors $V(S) = \hat{u}_n + \hat{v}_n \sim \hat{u}_n \sim \frac{1}{12(\beta+1)^2}n^{2\beta+2}$

$V(S) \sim \frac{1}{12(\beta+1)^2}n^{2\beta+2}$.

PARTIE 2

Q1.. $1 = \sum_{k=0}^n p(A=k) = a + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{k} = a + \lambda\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; $\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^n 1/k}$

Q2.. $n=3$ et $a = 1/12$ donc $\lambda = \frac{1-1/12}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{11/12}{11/6} = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2}$.

$p(A=0)=\frac{1}{12}$, $p(A=1)=\frac{1}{2}$, $p(A=2)=\frac{1}{4}$, $p(A=3)=\frac{1}{6}$.

$S = X_1 + 2X_2 + 3X_3$

$S(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

X_1	X_2	X_3	S	A
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	2	1
0	0	1	3	1
1	1	0	3	2
1	0	1	4	2
0	1	1	5	2
1	1	1	6	3

$p(S=0) = p(A=0) = \frac{1}{12}$

$p(S=1) = p(\{X_1=1\} \cap \{A=1\})$

$= p(\{X_1=1\}/\{A=1\})\, p(A=1)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Igi

$p(S=2) = p(\{X_2=1\} \cap \{A=1\}) = p(\{X_2=1\}/\{A=1\})\, p(A=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$p(S=3) = p(\{X_3=1\} \cap \{A=1\}) + p((\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\}) \cap \{A=2\})$

$p(S=3) = p(\{X_3=1\}/\{A=1\})\, p(A=1) + p((\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\})/\{A=2\})\, p(A=2)$

$p(S=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2(2-1)}{3(3-1)} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

$p(S=4) = p(\{X_1=1\} \cap \{X_3=1\} \cap \{A=2\}) = p((\{X_1=1\} \cap \{X_3=1\})/\{A=2\})\, p(A=2)$

$= \frac{2(2-1)}{3(3-1)} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

De même $p(S=5) = p((\{X_2=1\} \cap \{X_3=1\})/\{A=2\})\, p(A=2) = \frac{1}{12}$.

$p(S=6) = p(A=3) = \frac{1}{6}$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

$\sum_{k=0}^{6} p(S=k) = \frac{1}{12}[1+2+2+3+1+1+2] = \frac{12}{12} = 1$!

$E(S) = 0 + 1 \times \frac{2}{12} + 2 \times \frac{2}{12} + 3 \times \frac{3}{12} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{2}{12} = \frac{36}{12}$; $\underline{\underline{E(S)=3}}$

$E(S^2) = 0 + 1^2 \times \frac{2}{12} + 2^2 \times \frac{2}{12} + 3^2 \times \frac{3}{12} + 4^2 \times \frac{1}{12} + 5^2 \times \frac{1}{12} + 6^2 \times \frac{2}{12} = \frac{150}{12} = \frac{25}{2} = 12,5$

$V(S) = \frac{25}{2} - 9 = \frac{9}{2}$. $\underline{\underline{V(S) = \frac{7}{2}}} = 3,5$

Q3.. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $p(X_i=1)=\sum_{k=0}^{n} p(X_i=1/A=k)p(A=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\,p(A=k)=\sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{n}\frac{k}{n}\,\frac{\lambda}{k}$

$p(X_i=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{n}=n\times\frac{\lambda}{n}=\lambda$. $\underline{\underline{p(X_i=1)=\lambda}}$.

Q4.. $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ et $i\neq j$.

a) $p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})=\sum_{k=0}^{n} p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})/A=k)p(A=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,p(A=k)$

$p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})=\sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\times\frac{\lambda}{k}=\frac{\lambda}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{\lambda}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{\lambda}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2}=\frac{\lambda}{2}$

$\underline{\underline{p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})=\frac{\lambda}{2}}}$.

b) X_i et X_j sont deux var de Bernoulli, par conséquent elles sont indépendantes si et seulement si $p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})=p(X_i=1)p(X_j=1)$, c'est à dire si et seulement si : $\frac{\lambda}{2}=\lambda^2$.

$\lambda=\frac{1-a}{\sum_{k=1}^{n}1/k}$

$\frac{\lambda}{2}=\lambda^2\Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda=0\Leftrightarrow A=0$ ou $\lambda=1/2 \Leftrightarrow 1-a=0$ ou $2(1-a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\frac{\lambda}{2}=\lambda^2\Leftrightarrow a=1$ ou $2(1-a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Notons que $2(1-a)\in]0,2[$ et que $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{k\geq1}$ est une suite strictement croissante dont les 4 premiers termes sont : 1, $3/2$, $\frac{11}{6}$ et $\frac{25}{12}$. $\frac{11}{6}<2$ et $\frac{25}{12}>2$.

Rappelons que : $n\geq2$

Par conséquent : $\frac{\lambda}{2}=\lambda^2\Leftrightarrow a=1$ ou $(n=2$ et $2(1-a)=\frac{3}{2})$ ou $(n=3$ et $2(1-a)=\frac{11}{6})$

$\frac{\lambda}{2}=\lambda^2\Leftrightarrow a=1$ ou $(n=2$ et $a=1/4)$ ou $(n=3$ et $a=\frac{1}{12})$. Or $a\in]0,1[$;

donc : X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si : $(n=2$ et $a=\frac{1}{4})$ ou $(n=3$ et $a=\frac{1}{12})$.

c) $\text{cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})-p(X_i=1)p(X_j=1)=\frac{\lambda}{2}-\lambda^2$

$\underline{\underline{\text{cov}(X_i,X_j)=\frac{\lambda}{2}-\lambda^2}}$

Q5.. $E(S)=E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda$. $\underline{\underline{E(S)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}$

De même que dans la première partie : $V(S)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2V(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_i\alpha_j\,\text{cov}(X_i,X_j)$

$V(X_i) = p(X_i = 1)\,p(X_i = 0) = \lambda(1-\lambda)$ et $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2$

de plus $2 \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \sum \alpha_i^2$

donc $V(S) = \lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right]$

$V(S) = \left[\lambda(1-\lambda) - \frac{\lambda}{2} + \lambda^2\right] \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2$

$V(S) = \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$

Q6°.- a) Voir à la fin

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

et ii) $v_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} 1/k + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0 donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; $\ln(1-x) + x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Par conséquent : $v_n \sim -\frac{(1/n)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}$; $-v_n \sim 1/2n^2$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $-v_n = -(u_n - u_{n-1})$; la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ converge.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1$; $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n v_k$

La suite $\left(\sum_{k=2}^n v_k\right)_{n \geq 2}$ converge puisque la série de terme général v_n converge, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln n} - 1\right) = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln n} = 1$; $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$

c) Rappelons que : $\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^n 1/k}$ donc $\lambda \sim \frac{1-a}{\ln n}$!

$E(S) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^n i^\beta \sim \frac{1-a}{\ln n} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$

$E(S) \sim \frac{1-a}{\ln n} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$

d] Rappelons que : $V(S)=\lambda\left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right]$

Posons $a_n=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\sum_{i=1}^{n}i^\beta\right)^2$ et $b_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^{2\beta}$

$\lambda\sim\frac{1-a}{\ln n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\lambda=0$.

$a_n\sim\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^\beta\right)^2\sim\frac{1}{2}\left(\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}\right)^2=\frac{1}{2(\beta+1)^2}n^{2\beta+2}$

$b_n\sim\frac{1}{2}\frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}$

Par conséquent $b_n=o(a_n)$ $\left(\frac{b_n}{a_n}\sim\frac{2(\beta+1)^2}{2(2\beta+1)}\times\frac{1}{n}\right)$

donc $a_n+b_n\sim a_n$.

Par conséquent $V(S)=\lambda(a_n+b_n)\sim\lambda a_n\sim\frac{1-a}{\ln n}\frac{1}{2(\beta+1)^2}n^{2\beta+2}$

Donc : $V(S)\sim\frac{1-a}{2(\beta+1)^2}\frac{n^{2\beta+2}}{\ln n}$

Q7.. a] L'hypothèse la plus raisonnable est (H") car $p(A=k)=\frac{\lambda}{k}$ donc la probabilité d'acheter k produits diminue lorsque k augmente, alors que dans (H') : $p(A=k)=\frac{1}{n+1}$; cette probabilité est constante.

b] (H') donne $E(S)=(1/2)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

(H") donne $E(S)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

$\frac{1}{2}<\lambda\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<2(1-a)\iff\left(n=2\text{ et }\frac{3}{2}<2(1-a)\right)\text{ ou }\left(n=3\text{ et }\frac{11}{6}<2(1-a)\right)$

$a\in]0,1[$, $n\geq 2$, $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\geq1}$ croissante et de premiers termes $1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12}$

$\frac{1}{2}<\lambda\iff\left(n=2\text{ et }a<\frac{1}{4}\right)$ ou $\left(n=3\text{ et }a<\frac{1}{12}\right)$.

En moyenne (H") est strictement plus avantageux que (H') ssi ($n=2$ et $a<\frac{1}{4}$) ou ($n=3$ et $a<\frac{1}{12}$).

L'algorithme.-

Lire n, a, beta

Initialiser r à 1, s à 1, l à 1

Pour i variant de 2 à n faire:

- r prend la valeur de $r + i^{\beta}$
- s prend la valeur de $s + i^{2\beta}$
- l prend la valeur de $l + 1/i$

l prend la valeur de $(1-a)/l$

Afficher $l * r$

Afficher $l * ((0,5 - l) * r^2 + 0,5 * s)$

Le programme

```
program ecrico92;

uses crt;
var n,i:integer;a,beta,r,s,l:real;

begin
clrscr;
write('Donnez le nombres n d''articles. n=');readln(n);
write('Donnez la valeur de a. a=');readln(a);
write('Donnez la valeur de beta. beta=');readln(beta);
r:=1;s:=1;l:=1;
for i:=2 to n do
    begin
    r:=r+exp(beta*ln(i));s:=s+exp(2*beta*ln(i));l:=l+1/i
    end;
l:=(1-a)/l;
writeln;
writeln('L''espérance est sensiblement : ',l*r:6:2);
write('La variance est sensiblement : ',l*((0.5-l)*sqr(r)+0.5*s):6:2)
end.
```

Exécution.-

```
Donnez le nombres n d'articles. n=10
Donnez la valeur de a. a=0.1
Donnez la valeur de beta. beta=1.5

L'espérance est sensiblement :  43.84
La variance est sensiblement : 1670.19
```

```
Donnez le nombres n d'articles. n=20
Donnez la valeur de a. a=0.5
Donnez la valeur de beta. beta=1.2

L'espérance est sensiblement :  48.55
La variance est sensiblement : 6712.18
```