EXERCICE 1

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx$ soit convergente.

On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) (i) Pour $k \in [[1,n]]$, montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$.

(ii) Pour $k \in [[1,n-1]]$, montrer que : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(iii) En déduire que : $\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$.

b) En déduire la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

2°) a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}} du$.

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $I = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

3°) Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$.

a) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule et affiche P_n.

b) Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$.

c) A l'aide du **1°)**, déterminer la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

La convergence est-elle rapide ?

EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1°) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si : $(a-\lambda^2)(d-\lambda^2) - bc = 0$.

b) En déduire l'équivalence suivante :

λ est valeur propre de $\phi(A)$ $\Leftrightarrow$ λ^2 est valeur propre de A.

c) Exemple : si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$?

$\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

2°) On suppose maintenant que <u>$a = 1$ et $b = 0$</u>.

a) Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $V(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer V(1) et V(-1), ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

(ii) Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

b) Etablir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \text{ } et \text{ } c = 0) \\ ou \\ (d \rangle 0 \text{ } et \text{ } d \neq 1) \end{cases}$

c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

(i) c et d sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

(ii) c et d sont des *réels* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas (i) et (ii) précédents.

PROBLEME

Un jeu réunit une infinité de joueurs A_1 , A_2 , ... , A_n , ...

* D'abord A_1 ,A_2 ,A_3 disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables.
  Le joueur classé dernier est éliminé.

* Les deux autres et A_4 disputent un deuxième tournoi analogue (indépendant du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.

* Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.

* Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec A_5 un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers) etc...

* A chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.

* Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à 2 tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).

- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note G_n l'événement :
  "A_1 est gagnant du jeu au n-ième tournoi".

- Enfin, soit X la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).
  L'objet du problème est d'étudier la v.a. X et de calculer la probabilité pour que le joueur A_1 gagne.

Le problème est composé de deux parties largement indépendantes.

Première partie : loi de X et probabilité de G_n pour $n \in \{2,3,4,7\}$

A) 1°) Calculer $P(G_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur A_1 remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut $P(X=2)$?

2°) Pour tout entier $k \geq 4$, on note J_k l'événement : "A_k joue".

a) Montrer que $P(J_5) = \frac{2}{3}$. Pour $i \geq 4$, que vaut $P(J_{i+1}/J_i)$?

b) En déduire que $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$

3°) a) Pour tout entier $n \geq 2$, comparer les événements $(X \geq n)$ et J_{n+2}.

b) En déduire la valeur de $P(X=n)$.

c) Vérifier qu'on a bien : $\sum_{n=2}^{\infty} P(X=n) = 1$.

4°) Quelle est la loi suivie par X-1 ? En déduire l'espérance et la variance de X.

B) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls, on considère les événements P_i et S_j suivants :

P_i : "A_1 est classé <u>premier</u> au i-ème tournoi" ;

S_j : "A_1 est classé <u>second</u> au j-ème tournoi <u>et le jeu continue</u>" .

1°) Exprimer G_3 et G_4 à l'aide de ces événements.

2°) a) Calculer $P(G_3)$.

b) Montrer que $P(S_2/S_1) = \frac{1}{6}$; et que $P(S_2/P_1) = \frac{1}{3}$.

Prouver que $P(G_4) = \frac{1}{54}$.

3°) a) Ecrire les suites des classements de A_1 (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'événement G_7, (on vérifiera qu'il y en a huit).

b) Calculer $P(G_7)$.

Deuxième partie : probabilité pour que le joueur A_1 gagne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [[0,n]]$, soit $\mathcal{U}_n^k$ l'ensemble des n-listes de $\{1,2\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

a) elles finissent par 2 ;

b) elles ne contiennent jamais deux "1" consécutifs ;

c) k fois (exactement) un "2" est suivi d'un autre "2".

Exemples : la suite (1,2,2,1,2,1,2,2,2,1,2) appartient à $\mathcal{U}_{11}^3$; $(1,2,2,2) \in \mathcal{U}_4^2$; $(2,1,2,2) \in \mathcal{U}_4^1$; $(2,2,1,2,2) \in \mathcal{U}_5^2$; $(1,2,2,2,2) \in \mathcal{U}_5^3$.

On pose $u_n^k = card\,\mathcal{U}_n^k$, avec la convention : $u_0^0 = 1$.

1°) Calcul de u_n^k

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{U}_n^0$, $\mathcal{U}_n^n$, $\mathcal{U}_{n+1}^n$, $\mathcal{U}_{n+2}^n$.

En déduire que $u_n^0 = 1$, $u_n^n = 0$, $u_{n+1}^n = 1$, $u_{n+2}^n = 1$.

b) En classant les n-listes de $\mathcal{U}_n^k$ suivant la valeur de leur (n-1)-ième élément, montrer que, pour $n \geq 3$ *et* $k \geq 1$: $\underline{u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}}$.

c) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \in [[0,i]]$, on pose : $\underline{\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^j}$ *et* $\underline{\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j}$.

(i) Calculer γ_i^0 *et* γ_i^i ; pour $i \geq 2$ *et* $j \in [[1, i-1]]$, exprimer $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$ en fonction de γ_i^j.
En déduire la valeur de γ_i^j.

(ii) Procéder de la même façon qu'au (i) pour obtenir δ_i^j.

(iii) En déduire que : $\underline{\forall (k,p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = C_{k+p}^k}$.

2°) Deux séries

Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $f : [0,x] \to \mathbb{R}$

$$u \to \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(p)}(u)$.

b) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{C}_{k+p}^{k} x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \mathrm{C}_{k+n}^{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n$$

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{C}_{k+p}^{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

d) Calculer $\displaystyle\alpha_k = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{u}_{k+2p+1}^{k} \left(\frac{1}{3} \right)^{k+2p+3}$ et $\displaystyle\alpha'_k = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{u}_{k+2p+2}^{k} \left(\frac{1}{3} \right)^{k+2p+4}$

3°) Probabilité pour que A_1 gagne : on note p_1 cette probabilité.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\mathrm{P}(\mathrm{G}_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{u}_{n-2}^{k} \left(\frac{1}{6} \right)^k \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k}$ (il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de $\mathrm{P}(\mathrm{G}_7)$ effectué à la fin de la première partie).

b) A l'aide d'une "permutation de Σ" (dont on admettra la validité), montrer que :

$$\mathrm{p}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \beta_k, \quad \text{avec} \quad \beta_k = \sum_{n=k+2}^{\infty} \mathrm{u}_{n-2}^{k} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

c) Calculer β_0.

d) Pour $k \geq 1$, montrer que $\beta_k = \dfrac{4}{27} \left(\dfrac{3}{8} \right)^{k+1}$

e) En déduire enfin la valeur de p_1.