Exercice 1.. Q1 - f est clairement une application de E dans E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P,S) \in E^2$

$f(\lambda P+S) = (2X+1)(\lambda P+S)(X) - (X^2-1)(\lambda P+S)'(X)$. Comme $(\lambda P+S)' = \lambda P' + S'$ il vient :

$f(\lambda P+S) = \lambda\left[(2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)\right] + \left[(2X+1)S(X) - (X^2-1)S'(X)\right]$; c'est à dire :

$f(\lambda P+S) = \lambda f(P) + f(S)$.

Ceci achève de montrer que <u>f est un endomorphisme de E</u>.

Q2 a) Notons r le degré de B ($r \in \mathbb{N}$ car $B \neq 0$). Notons a_r le coefficient de X^r dans B

le coefficient de X^{r+1} dans $f(B)$ est : $2a_r - r a_r$.

le coefficient de X^{r+1} dans λB est 0.

$f(B) = \lambda B$ fournit alors : $2a_r - r a_r = 0$; soit $r = 2$ car a_r n'est pas nul.

Par conséquent <u>le degré de B est nécessairement 2</u>.

b) $\lambda = 3$. $(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = 3B(X)$.

En prenant la valeur en -1 il vient : $-B(-1) - 0 = 3B(-1)$; donc $B(-1) = 0$; -1 est racine de B.

$B(X) = (X+1)^k A(X)$ avec $A(-1) \neq 0$. Notons que $k = 1$ ou 2.

$f(B) = 3B$ donne : $(2X+1)(X+1)^k A(X) - (X^2-1)\left(k(X+1)^{k-1}A(X) + (X+1)^k A'(X)\right) = 3(X+1)^k A(X)$

En divisant par $(X+1)^k$ il vient :

$(2X+1)A(X) - (X-1)k\,A(X) - (X^2-1)A'(X) = 3A(X)$. En prenant la valeur en -1 et en divisant par $A(-1)$ ($A(-1) \neq 0$!) on obtient $-1 + 2k = 3$ c'est à dire $k = 2$.

$B(X) = (X+1)^2 A(X)$. Comme le degré de B est 2, A est constant.

$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ B(X) = \alpha (X+1)^2$.

Nous venons de montrer que : $B \neq 0$ et $f(B) = 3B \Rightarrow B \in \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$. Cela ne permet pas de dire que 3 est valeur propre de f !

Pour montrer cela montrons que : $\mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Il suffit de prouver que : $f\left((X+1)^2\right) = 3(X+1)^2$.

$f\left((X+1)^2\right) = (2X+1)(X+1)^2 - (X^2-1)(2(X+1)) = (X+1)^2\left(2X+1 - 2(X-1)\right) = 3(X+1)^2$

Finalement : $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$. Donc <u>$3$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X+1)^2$.</u>

c) Ici $\lambda = -1$. $f(B) = -B$

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = -B(X)$

En prenant la valeur en 1 on obtient : $3B(1) - 0 = -B(1)$; $B(1) = 0$.

Soit p l'ordre de multiplicité de 1 dans B.

$\exists C \in E$, $B(X) = (X-1)^p C(X)$ avec $C(1) \neq 0$.

$f(B) = -B$ donc $(2X+1)(X-1)^p C(X) - (X^2-1)p(X-1)^{p-1}C(X) - (X^2-1)(X-1)^p C'(X) = -(X-1)^p C(X)$

En divisant par $(X-1)^p$ il vient :

$(2X+1)C(X) - (X+1)p\,C(X) - (X^2-1)C'(X) = -C(X)$; donc :

$3C(1) - 2p\,C(1) - 0 = -C(1)$. Comme $C(1) \neq 0$: $3 - 2p = -1$; $p = 2$

$B(X) = (X-1)^2 C(X)$. Comme $\deg B = 2$: C est constant

Par conséquent $B \in \mathrm{Vect}((X-1)^2)$; donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^2)$

Réciproquement : $f((X-1)^2) = (2X+1)(X-1)^2 - (X^2-1)2(X-1) = (X-1)^2(2X+1-2(X+1)) = -(X-1)^2$

Donc $\mathrm{Vect}((X-1)^2) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Finalement : $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$. <u>$-1$ est alors valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X-1)^2$.</u>

d) $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = \lambda B(X)$

En prenant la valeur en 1 il vient $3B(1) = \lambda B(1)$ et donc $B(1) = 0$ car $\lambda \neq 3$

" " " -1 il vient $-B(-1) = \lambda B(-1)$ et donc $B(-1) = 0$ car $\lambda \neq -1$

Donc 1 et -1 sont racines de B comme $\deg B = 2$:

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $B(X) = \gamma(X+1)(X-1) = \gamma(X^2-1)$. γ n'est pas nul car B ne l'est pas.

Calculons, rien que pour s'amuser $f(X^2-1)$!

$f((X^2-1)) = (2X+1)(X^2-1) - (X^2-1)2X = (X^2-1)(2X+1-2X) = (X^2-1)$

Donc $f(B) = f(\gamma(X^2-1)) = \gamma f(X^2-1) = \gamma(X^2-1) = B$ or $f(B) = \lambda B$ et $B \neq 0$ donc $\lambda = 1$

Ceci prouve que :

1°. Si λ est une valeur propre de f distincte de 3 et -1 alors $\lambda = 1$

2°. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}(X^2-1)$

Or nous avons vu que $f(X^2-1) = X^2-1$ donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(X^2-1)$

<u>1 est effectivement valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par X^2-1.</u>

Résumons même si cela n'est pas demandé.

1°.. Spec $f = \{-1, 1, 3\}$

2°.. Les sous-espaces propres associés sont respectivement : $\mathrm{Vect}((X-1)^2)$, $\mathrm{Vect}((X-1)(X+1))$, $\mathrm{Vect}((X+1)^2)$.

Q3 .. a) Soit $P \in F = \mathbb{R}_2[X]$

$g(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$ donc $g(P)$ est de degré au plus 3

Soit a le coefficient de X^2 dans P

Le coefficient de X^3 dans $g(P)$ est : $2a - 2a = 0$. Finalement $g(P)$ est de degré au plus 2.

$\forall P \in F,\ g(P) \in F$.

De plus : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,S) \in F^2,\ g(\lambda P + S) = f(\lambda P + S) = \lambda f(P) + f(S) = \lambda g(P) + g(S)$.

<u>g est un endomorphisme de F.</u>

b) $g(1) = (2X+1) = 1 + 2X$

$g(X) = (2X+1)X - (X^2-1) = X^2 + X + 1 = 1 + X + X^2$

$g(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2 + 2X = 2X + X^2$

finalement : $\underline{M_B(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$. Notons encore que $(X-1)^2$, $(X-1)(X+1)$ et $(X+1)^2$ sont <u>des éléments de F</u> et : $\begin{cases} g((X-1)^2) = f((X-1)^2) = -(X-1)^2 \\ g((X-1)(X+1)) = f((X-1)(X+1)) = (X-1)(X+1) \\ g((X+1)^2) = 3(X+1)^2 \end{cases}$

c) Posons $\mathcal{B}' = ((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre de F car elle constituée de vecteurs propres de g associés à des valeurs propres <u>distinctes</u>, comme $\dim F = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de F comme famille libre de trois éléments de F.

La matrice de g dans $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. <u>g et A sont diagonalisables.</u>

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1°.. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2°.. $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$

Une récurrence simple montre alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$ et achève la question.

d) P^{-1} n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et

$(X-1)^2 = X^2-2X+1$, $X^2-1 = X^2-1$! , $(X+1)^2 = X^2+2X+1$.

$$X = \frac{1}{4}\left[(X+1)^2-(X-1)^2\right] = -\frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$1 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1-2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$X^2 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1+2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

Finalement $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & -(-1)^n & (-1)^n \\ -2 & 0 & 2 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n+2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n-2+3^n \\ -2(-1)^n+2\times 3^n & 2(-1)^n+2\times 3^n & -2(-1)^n+2\times 3^n \\ (-1)^n-2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n+2+3^n \end{bmatrix}$$

(Q1) a) Le critère de Riemann indique que la série de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

Par conséquent $f(x)$ a un sens pour tout réel x appartenant à $]1, +\infty[$.

b) Soit $x \in]1, +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n \, u_n(x) = \dfrac{\ln^2 n}{n^{x-\frac{x+1}{2}}} = \dfrac{\ln^2 n}{n^{\frac{x-1}{2}}} = \left(\dfrac{\ln n}{n^{\frac{x-1}{4}}}\right)^2$

Or $\frac{x-1}{4} > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{x-1}{4}}} = 0$ $\quad (\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln n = o(n^\beta))$

Finalement : $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} [n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n \, u_n(x)] = 0.}$

Il en résulte que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n \, u_n(x) \leqslant 1$

ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \ln^2 n \, u_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}} = u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$\frac{x+1}{2} > 1$ donc la série de terme général $u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs assurent la <u>convergence de la série de terme général $\ln^2 n \, u_n(x)$.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \Rightarrow 0 \leqslant \ln n \, u_n(x) \leqslant (\ln n)^2 u_n(x)$

$\uparrow$ $\ln n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 3$

La convergence de la série de terme général $(\ln n)^2 u_n(x)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la <u>convergence de la série de terme général $\ln n \, u_n(x)$.</u>

c) $\forall x \in]1, +\infty[$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x \ln n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $u_n'(x) = -\ln n \, e^{-x \ln n} = -\ln n \, u_n(x)$

u_n' est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $u_n''(x) = (-\ln n)^2 u_n(x) = \ln^2 n \, u_n(x)$

u_n'' étant continue sur $]1, +\infty[$, <u>u_n est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$.</u>

Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x \in]1, +\infty[$ et $|h| < \frac{x-1}{2}$.

Remarquons que : $-h \leqslant |h| < \frac{x-1}{2}$ donc $x + h > x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} > 1$

u_n est donc de classe C^2 sur le segment défini par x et $x+h$.

Appliquons sur ce segment l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à u_n.
Il vient :

$$|u_n(x+h) - u_n(x) - (x+h-x)\,u_n'(x)| \le \frac{|x+h-x|^2}{2!} \max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]} |u_n''(t)| \ ;$$

$$|u_n(x+h) - u_n(x) - h(-\ln n\, u_n(x))| \le \frac{h^2}{2} \max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]} |(\ln n)^2 u_n(t)| = \frac{h^2}{2}(\ln n)^2 \max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]} \frac{1}{n^t}.$$

Notons que si $t \in [\overleftrightarrow{x,x+h}]$: $|t-x| \le |h|$; $x-t \le |h| \le \frac{x-1}{2}$; $t \ge x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$.

Donc : $\forall t \in [\overleftrightarrow{x,x+h}]$, $\frac{1}{n^t} \le \frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}$; $\max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]} \frac{1}{n^t} \le \frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}} = u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Finalement :

$$\underline{\underline{|u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln n\, u_n(x)| \le \frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right).}}$$

Sommons ! Mais justifions d'abord.

$\frac{x+1}{2} > 1$, la série de terme général $\frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$ converge d'après Q1b

ceci assure l'<u>absolue convergence</u> de la série de terme général $u_n(x+h)-u_n(x)+h\ln n\, u_n(x)$

Nous pouvons alors écrire :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(u_n(x+h) - u_n(x) + h\ln n\, u_n(x)\right)\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x+h) - u_n(x) + h\ln n\, u_n(x)| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

Les séries de termes généraux $u_n(x+h)$, $u_n(x)$ et $h \ln n\, u_n(x)$ étant convergentes

il vient :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) + h\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, u_n(x)\right| \le \frac{h^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) ;$$ c'est à dire :

$$\underline{\underline{\left|f(x+h) - f(x) + h\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right| \le \frac{h^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)}}$$

<u>d)</u> Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < |h| < \frac{x-1}{2}$.

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right| \le \frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

$\lim_{h\to 0}\left[\frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = 0$; par encadrement on obtient : $\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right] = 0$

C'est à dire : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \; u_n(x)$.

f est donc dérivable en x et $\displaystyle f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \; u_n(x)$ et ceci pour tout $x \in]1,+\infty[$.

Remarque.. Nous avons justifié la dérivation terme à terme de la série de terme général $u_n(x)$, OK ?!

Q2 a) Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[k,k+1]$ donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^x} \underset{①}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \underset{②}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^x}$

donc : $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$.

Soit $N \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^x} \underset{①}{\leq} \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^N \frac{dt}{t^x} \quad ; \text{ donc : } \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}.$$

$$\sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \underset{②}{\leq} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \quad ; \text{ donc } \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x}.$$

Finalement : $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}$ pour $N \in \mathbb{N}$ et $N > 1$.

b) Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N > 1$.

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{-x+1}\left[t^{-x+1}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{x-1}\left[t^{-x+1}\right]_{N+1}^{2} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right].$$

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \; \frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$

De même : $\displaystyle\int_1^N \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left[t^{-x+1}\right]_N^1 = \frac{1}{x-1}\left[1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right]$; $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités de a) il vient :

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = f(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \quad ; \text{ donc : } 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

c) Soit $x \in]1,+\infty[$; $f(x) \geq 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

Or $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right] = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Remarque. $\forall x \in]1,+\infty[$, $(x-1) + \dfrac{1}{2^{x-1}} \leq (x-1)f(x) \leq (x-1)+1$

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{x\to 1^+}[(x-1)f(x)] = 1$; $f(x) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)2^{x-1} = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) = 1$

En utilisant l'encadrement du b) il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

d) $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln n \, u_n(x) < 0$.

f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ 1

Les droites d'équation $x = 1$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

Pour la courbe...

Remarques... . f est la fonction dzeta.

. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(2k) = \dfrac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ étant la suite des nombres de Bernoulli ($b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k = 0$; donc $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $b_{2k+1} = 0$, $b_2 = +\frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_6 = \frac{1}{42}$, $b_8 = -\frac{1}{30}$, $b_{10} = \frac{5}{66}$, $b_{12} = -\frac{691}{2730}$, ...)