Ruine du joueur et du crédit du concepteur !

PARTIE A — Etude d'une suite récurrente.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p(U_{n+1}-U_n) = pU_{n+1}-pU_n = U_n - qU_{n-1} - pU_n = (1-p)U_n - qU_{n-1} \overset{1-p=q}{=} q(U_n - U_{n-1})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(U_{n+1}-U_n) = q(U_n - U_{n-1})$$

Q2 $\underline{p=q}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(U_{n+1}-U_n) = q(U_n-U_{n-1}) = p(U_n - U_{n-1})$. Comme p n'est pas nul :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1}-U_n = U_n - U_{n-1}$

Cela signifie que la suite $(U_{n+1}-U_n)_{n\geq 0}$ est constante donc que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique. Notons r la raison de cette suite.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + nr$. En particulier : $U_{a+b} = U_0 + (a+b)r$.

Ceci donne : $r = \dfrac{U_{a+b}-U_0}{a+b}$. Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 + n\,\frac{U_{a+b}-U_0}{a+b}.$$

Q3 V1.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - \frac{1}{p}U_n + \frac{q}{p}U_{n-1} = 0$. $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{p}z + \frac{q}{p} = 0$.

$$\Delta = \frac{1}{p^2} - 4\frac{q}{p} = \frac{1}{p^2}(1-4pq) = \frac{1}{p^2}(1-4p(1-p)) = \frac{1}{p^2}(4p^2-4p+1) = \left(\frac{2p-1}{p}\right)^2 > 0$$

$\uparrow p \neq q \Rightarrow p \neq \frac{1}{2}$.

Cette équation admet deux solutions : $\dfrac{\frac{1}{p}+\frac{2p-1}{p}}{2} = \underline{1}$ et $\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{2p-1}{p}}{2} = \frac{1}{p}-1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} = \underline{x}$.

$x \neq 1$ car $p \neq q$.

Par conséquent : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \lambda + \mu x^n$

V2.. Retrouvons ce résultat sans utiliser le cours sur ce type de suites.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{q}{p}(U_n - U_{n-1}) = x(U_n - U_{n-1})$.

$(U_{n+1}-U_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison x.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1}-U_n = x^n(U_1-U_0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = U_n - U_0 + U_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_k) + U_0 = \sum_{k=0}^{n-1} x^k (U_1-U_0) + U_0 \overset{x\neq 1}{=} (U_1-U_0)\frac{1-x^n}{1-x} + U_0$$

$U_n = \left[\frac{U_1-U_0}{1-x} + U_0\right] - \frac{U_1-U_0}{1-x}\, x^n$. Remarquons que ceci vaut encore pour $n=0$ et posons : $\lambda = \frac{U_1-U_0}{1-x} + U_0$ et $\mu = -\frac{U_1-U_0}{1-x}$

On obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \lambda + \mu x^n$. <u>Fin de V2</u>.

<u>Exercice</u>.. V3 ! montrer que $(U_{n+1}-xU_n)$ est constante donc que $(U_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique, et retrouver le résultat précédent.

Donc : $\begin{cases} U_0 = \lambda + \mu \\ U_{a+b} = \lambda + \mu x^{a+b} \end{cases}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \lambda + \mu x^n$.

Par différence il vient $\mu = \frac{U_0 - U_{a+b}}{1-x^{a+b}} = \frac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1}$.

On a alors $\lambda = U_0 - \mu = U_0 - \frac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1} = \frac{x^{a+b}U_0 - U_{a+b}}{x^{a+b}-1}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{x^{a+b}U_0 - U_{a+b}}{x^{a+b}-1} + \frac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1}\, x^n$.

On obtient donc U_n en fonction de n, a, b, U_0, U_{a+b} ... et $\underline{\underline{x}}$!

<u>Une remarque importante</u>.

Il importe de remarquer que si $(w_n)_{n\in[\![0,a+b]\!]}$ est une suite finie de réels telle que : $\forall n \in [\![1, a+b-1]\!],\ w_n = p\,w_{n+1} + q\,w_{n-1}$, un raisonnement analogue à celui qui précède montre que :

- pour $p=q$: $\forall n \in [\![0,a+b]\!],\quad w_n = w_0 + n\,\frac{w_{a+b}-w_0}{a+b}$

- pour $p\neq q$: $\forall n \in [\![0,a+b]\!],\quad w_n = \frac{x^{a+b}w_0 - w_{a+b}}{x^{a+b}-1} + \frac{w_{a+b}-w_0}{x^{a+b}-1}\, x^n$ avec $x = \frac{q}{p}$.

PARTIE B | Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Il importe de remarquer que, dans ce problème, le nombre de boules est constant. Par conséquent si A contient k boules B contient $a+b-k$ boules.
Outre le fait que l'on confond un événement avec une urne l'événement "le tirage se fait dans l'urne A" n'a aucun sens. Nous lui substituerons l'événement TA_1 (!!) le premier tirage se fait dans A. Encore un grand bravo pour ce con-cepteur.

(Q1) Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$. $(TA_1, \overline{TA_1})$ est un système complet d'événements.

Donc $p(E_k) = p(E_k / TA_1)\, p(TA_1) + p(E_k / \overline{TA_1})\, p(\overline{TA_1})$.

Or → $p(TA_1) = q$ et $p(\overline{TA_1}) = 1 - p(TA_1) = 1-q = p$.

→ $p(E_k / TA_1) = p(E_{k-1})$ le premier tirage ayant été fait dans A, réaliser E_k revient alors à vider l'urne A sachant qu'elle contient $k-1$ boules.

→ $p(E_k / \overline{TA_1}) = p(E_{k+1})$ le premier tirage ayant été fait dans B, réaliser E_k revient alors à vider l'urne A sachant qu'elle contient $k+1$ boules

Par conséquent : $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ p(E_k) = q\, p(E_{k-1}) + p\, p(E_{k+1}) = p\, p(E_{k+1}) + q\, p(E_{k-1})$

(Q2) a) La remarque de la page précédente permet alors de conclure.

Si $p = q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = p(E_0) + n\dfrac{p(E_{a+b}) - p(E_0)}{a+b} = 1 - \dfrac{n}{a+b}$.

Si $p \neq q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b} p(E_0) - p(E_{a+b})}{x^{a+b}-1} + \dfrac{p(E_{a+b}) - p(E_0)}{x^{a+b}-1} x^n$;

ou $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b}}{x^{a+b}-1} - \dfrac{x^n}{x^{a+b}-1}$.

Donc, pour $p = q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = 1 - \dfrac{n}{a+b}$ et $p(E_a) = 1 - \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b}$;

pour $p \neq q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b} - x^n}{x^{a+b}-1}$ et $p(E_a) = \dfrac{x^{a+b} - x^a}{x^{a+b}-1}$.

b) Si $p=q$: $\lim_{b\to+\infty} p(E_a) = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{a+b} = 1$.

Supposons $p \neq q$

1er cas.. $p<q$; $x>1$; $\lim_{b\to+\infty} x^{a+b} = +\infty$. $p(E_a) = \frac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} \underset{b\to+\infty}{\sim} \frac{x^{a+b}}{x^{a+b}} = 1$.

Alors $\lim_{b\to+\infty} p(E_a) = 1$

2ème cas.. $p>q$; $0<x<1$; $\lim_{b\to+\infty} x^{a+b} = 0$. $\lim_{b\to+\infty} p(E_a) = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} = x^a$

Alors $\lim_{b\to+\infty} p(E_a) = x^a$.

Remarque.. Supposons $p<q$. Il y a donc plus de chance de tirer dans A que dans B. Si le nombre b de boules contenues dans B devient très grand la probabilité de vider A s'approche de 1

c) $\lim_{p\to 0,5} x = 1$. $x^{a+b}-1 = e^{(a+b)\ln x} - 1 \underset{p\to 0,5}{\sim} (a+b)\ln x \underset{p\to 0,5}{\sim} (a+b)(x-1)$

$x^{a+b}-x^a = x^a(x^{a+b-a}-1) \underset{p\to 0,5}{\sim} 1\times(x^b-1) \underset{p\to 0,5}{\sim} b(x-1)$

donc $p(E_a) = \frac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} \underset{p\to 0,5}{\sim} \frac{b(x-1)}{(a+b)(x-1)} = \frac{b}{a+b}$.

Finalement : $\lim_{p\to 0,5} p(E_a) = \frac{b}{a+b}$ ce qui est $p(E_a)$ lorsque $p=q$!

(Q3) Notons F_a (oui a !) la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B (l'urne A contenant au départ a boules)
Pour obtenir $p(F_a)$ il suffit d'utiliser les résultats de Q2 en permutant les rôles de A et B. Ceci revient alors à permuter a et b ... et p et q.

Par conséquent,

- si $p=q$: $p(F_a)=\dfrac{a}{a+b}$;

- si $p\neq q$: $p(F_a)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{x}\right)^{b}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{a+b}-1}=\dfrac{1-x^a}{1-x^{a+b}}=\dfrac{x^a-1}{x^{a+b}-1}$.

Si $p=q$: $p(F_b)=\dfrac{a}{a+b}$, et si $p\neq q$: $p(F_b)=\dfrac{x^a-1}{x^{a+b}-1}$.

Q4 Notons T_a l'événement l'expérience se termine.

$T_a=E_a\cup F_a$. $p(T_a)=p(E_a)+p(F_a)$.

Si $p=q$: $p(T_a)=\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{a}{a+b}=1$.

Si $p\neq q$: $p(T_a)=\dfrac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1}+\dfrac{x^a-1}{x^{a+b}-1}=1$.

donc $\underline{p(T_a)=1}$; il est donc quasi-certain que l'expérience se termine.

PARTIE C Etude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer

Remarque .. Notons que p_{A_1} et p_{B_1} sont des probabilités. ok !!

Q1 Soit $j\in\mathbb{N}^*$. Rappelons que TA_1 est l'événement le premier tirage se fait dans A.
Soit $k\in[\![1,a+b-1]\!]$.

$p_{A_1}(X_k=j)=p_{A_1}(X_k=j\,/\,TA_1)\,p(TA_1)+p_{A_1}(X_k=j\,/\,\overline{TA_1})\,p(\overline{TA_1})$

- $p(TA_1)=q$ et $p(\overline{TA_1})=1-q=p$.

- $p_{A_1}(X_k=j\,/\,TA_1)=p_{A_1}(X_{k-1}=j-1)$, sachant que l'on vide A et que le premier tirage se fait dans A réalise $\{X_k=j\}$ c'est vider l'urne A en $j-1$ tirages sachant qu'elle contient $k-1$ boules.

- $p_{A_1}(X_k=j\,/\,\overline{TA_1})=p_{A_1}(X_{k+1}=j-1)$, sachant que l'on vide A et que le premier tirage se fait dans B réalise $\{X_k=j\}$ c'est vider l'urne A en $j-1$ tirages sachant qu'elle contient $k+1$ boules.

Finalement : $\underline{\underline{p_{A_1}(X_k=j) = q\, p_{A_1}(X_{k-1}=j-1) + p\, p_{A_1}(X_{k+1}=j-1)}}$

$p_{B_1}(X_k=j) = p_{B_1}(X_k=j \mid TA_1)\, p(TA_1) + p_{B_1}(X_k=j \mid \overline{TA_1})\, p(\overline{TA_1})$

- $p(TA_1) = q$ et $p(\overline{TA_1}) = p$.
- $p_{B_1}(X_k=j \mid TA_1) = p_{B_1}(X_k\ \ = j-1)$. Sachant que le premier tirage se fait dans A, il ne reste plus qu'à vider l'urne B en $j-1$ tirages sachant que A contient $k-1$ boules.

- $p_{B_1}(X_k=j \mid \overline{TA_1}) = p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)$ ... même type de raisonnement.

Donc $\underline{\underline{p_{B_1}(X_k=j) = q\, p_{B_1}(X_{k+1}=j-1) + p\, p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)}}$.

(A_1, B_1) est un système quasi-complet d'événements. Donc :

$p(X_k=j) = p_{A_1}(X_k=j)\, p(A_1) + p_{A_1}(X_k=j)\, p(B_1)$

$p(X_k=j) = q\, p_{A_1}(X_{k-1}=j-1) p(A_1) + p\, p_{A_1}(X_{k+1}=j-1) p(A_1) + q\, p_{B_1}(X_{k-1}=j-1) p(B_1) + p\, p_{B_1}(X_{k+1}=j-1) p(B_1)$

$p(X_k=j) = q\left[p_{A_1}(X_{k-1}=j-1) p(A_1) + p_{B_1}(X_{k-1}=j-1) p(B_1)\right] + p\left[p_{A_1}(X_{k+1}=j-1) p(A_1) + p_{B_1}(X_{k+1}=j-1) p(B_1)\right]$

soit encore : $\underline{\underline{p(X_k=j) = q\, p(X_{k-1}=j-1) + p\, p(X_{k+1}=j-1)}}$ pour $k \in [\![1, a+b-1]\!]$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$.

$E(X_k) = (-1)\, p(X_k=-1) + \sum_{j=0}^{+\infty} j\, p(X_k=j) = 0 + \sum_{j=0}^{+\infty} j\, p(X_k=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\, p(X_k=j)$

$E(X_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left[q\, p(X_{k-1}=j-1) + p\, p(X_{k+1}=j-1)\right]$. En changeant j en $j+1$ on obtient :

$E(X_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\left[q\, p(X_{k-1}=j) + p\, p(X_{k+1}=j)\right]$. Les séries de termes généraux $p(X_{k-1}=j)$, $j\, p(X_{k-1}=j)$, $p(X_{k+1}=j)$ et $j\, p(X_{k+1}=j)$ étant convergentes il vient :

$E(X_k) = q \sum_{j=0}^{+\infty} j\, p(X_{k-1}=j) + q \sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k-1}=j) + q \sum_{j=0}^{+\infty} j\, p(X_{k+1}=j) + p \sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k+1}=j)$

$\sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k+1}=j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k-1}=j) = 1$ car il est quasi-certain que l'expérience se termine.

Donc $E(X_k) = q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1}) + q + p$

Finalement : $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ E(X_k) = 1 + q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1})$.

(Q2) a) Remarquons que : $p = q = \frac{1}{2}$. Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$

$E(Y_k) = E(X_k) + \alpha k^2 = \frac{1}{2}E(X_{k-1}) + \frac{1}{2}E(X_{k+1}) + 1 + \alpha k^2$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}\left[E(Y_{k-1}) - \alpha(k-1)^2\right] + \frac{1}{2}\left[E(Y_{k+1}) - \alpha(k+1)^2\right] + 1 + \alpha k^2$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) - \alpha\left[\underbrace{\frac{(k-1)^2}{2} + \frac{(k+1)^2}{2} - k^2}_{=1}\right] + 1$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1}) - \alpha + 1$

En prenant $\alpha = 1$ on obtient : $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_k)$.

b) On a encore $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ E(Y_k) = p\,E(Y_{k+1}) + q\,E(Y_k)$ avec $p = q = \frac{1}{2}$

La partie A donne alors : $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ E(Y_n) = E(Y_0) + n\,\dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b}$

En particulier : $E(Y_a) = E(Y_0) + a\,\dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b}$

$E(Y_0) = E(X_0) + \alpha \times 0^2 = E(X_0) = 0$

$E(Y_{a+b}) = E(X_{a+b}) + \alpha \times (a+b)^2 = 0 + (a+b)^2 = (a+b)^2$

Finalement : $E(X_a) = E(Y_a) - \alpha a^2 = E(Y_a) - a^2 = 0 + a\,\dfrac{(a+b)^2 - 0}{a+b} - a^2 = a[a+b-a]$

$E(X_a) = ab$

Remarque. Soit $\in [\![0, a+b]\!]$

$E(Y_n) = E(Y_0) + n\,\dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b} = 0 + n\,\dfrac{(a+b)^2}{a+b} = n(a+b)$

$E(X_n) = n(a+b) - n^2 = n(a+b-n)$.

(Q3) a) Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$.

$E(Z_k) = E(X_k) + \beta k = q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1}) + \beta k + 1$

$E(Z_k) = q\left(E(Z_{k-1}) - \beta(k-1)\right) + p\left(E(Z_{k+1}) - \beta(k+1)\right) + \beta k + 1$

$E(Z_k) = qE(Z_{k-1}) + pE(Z_{k+1}) - \beta(qk - q + pk + p - k) + 1$

$E(Z_k) = qE(Z_{k-1}) + pE(Z_{k+1}) - \beta(p-q) + 1$.

En posant $\beta = \frac{1}{p-q}$ il vient alors : $\forall k \in [\![0, a+b]\!]$, $E(Z_k) = qE(Z_{k-1}) + pE(Z_{k+1})$.

b) A) donne alors : $\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(Z_n) = \dfrac{x^{a+b}E(Z_0) - E(Z_{a+b})}{x^{a+b}-1} + \dfrac{E(Z_{a+b}) - E(Z_0)}{x^{a+b}-1}\, x^n$

$E(Z_0) = E(X_0) + \beta \times 0 = 0$. $E(Z_{a+b}) = E(X_{a+b}) + \beta(a+b) = \dfrac{a+b}{p-q}$

$\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(X_n) = E(Z_n) - \dfrac{n}{p-q} = \dfrac{x^{a+b} \times 0 - \frac{a+b}{p-q}}{x^{a+b}-1} + \dfrac{\frac{a+b}{p-q} - 0}{x^{a+b}-1} \times x^n - \dfrac{n}{p-q}$

$\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(X_n) = \dfrac{1}{p-q}\left[\dfrac{(a+b)(x^n-1)}{x^{a+b}-1} - n\right]$

En particulier : $E(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left[\dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right]$

c) Parions que nous allons trouver $\lim\limits_{p \to 0,5} E(X_a) = ab$!

Posons $y = x - 1$

$\lim\limits_{p \to 0,5} y = 0$.

$E(X_a) = \dfrac{1}{p(1-\frac{q}{p})} \dfrac{1}{(y+1)^{a+b}-1}\left[(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b\right]$

$\dfrac{1}{p(1-\frac{q}{p})} = \dfrac{1}{p(1-x)} = -\dfrac{1}{py} \underset{p \to 0,5}{\sim} -\dfrac{2}{y}$. $\dfrac{1}{(y+1)^{a+b}-1} = \dfrac{1}{e^{(a+b)\ln(1+y)}-1} \underset{p \to 0,5}{\sim} \dfrac{1}{(a+b)\ln(1+y)} \sim \dfrac{1}{(a+b)y}$

Donc $E(X_a) \underset{p \to 0,5}{\sim} -\dfrac{2}{(a+b)y^2}\left[(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b\right]$

$(y+1)^a = 1 + ay + \frac{a(a-1)}{2}y^2 + o(y^2)$ et $(y+1)^{a+b} = 1 + (a+b)y + \frac{(a+b)(a+b-1)}{2}y^2 + o(y^2)$

$(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b = (a+b) + a(a+b)y + (a+b)\frac{a(a-1)}{2}y^2 - a - a(a+b)y - \frac{a(a+b)(a+b-1)}{2}y^2 - b + o(y^2)$

$$(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b = \frac{a(a+b)}{2}[a-1-(a+b-1)]y^2 + o(y^2) = -\frac{ab(a+b)}{2}y^2 + o(y^2).$$

donc $(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b \underset{p \mapsto 0,5}{\sim} -\frac{ab(a+b)}{2}y^2$

$$E(X_a) \underset{p \mapsto 0,5}{\sim} -\frac{2}{(a+b)y^2} \times \left(-\frac{ab(a+b)}{2}y^2\right) = ab.$$

$$\underline{\underline{\lim_{p \mapsto 0,5} E(X_a) = ab}}.$$

d) $p < q$. $\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} \underset{b \mapsto +\infty}{\sim} (x^a-1)\frac{b}{x^{a+b}} = (x^a-1)\frac{b}{e^{(a+b)\ln x}}$ $\quad x = \frac{q}{p} > 1$

$$\lim_{b \mapsto +\infty} (x^a-1)\frac{b}{e^{(a+b)\ln x}} = 0 \quad \text{car } x > 1.$$

donc $\lim_{b \mapsto +\infty} E(X_a) = \lim_{b \mapsto +\infty} \frac{1}{p-q}\left[\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right] = -\frac{a}{p-q} = \frac{a}{q-p}.$

$$\underline{\underline{\lim_{b \mapsto +\infty} E(X_a) = \frac{a}{q-p} = \frac{a}{1-2p}}}.$$