ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option Générale

Aucun document n'est autorisé
L'énoncé comporte 6 pages.

Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

Recherche des valeurs propres d'un endomorphisme

Dans cet exercice :
E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X+1) \cdot P(X) - (X^2-1) \cdot P'(X)$$

1° Montrer que f est un endomorphisme de E.

2° Soit B un vecteur propre pour f, c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation : $f(B) = \lambda B$.

a) Montrer que B est nécessairement de degré 2.

b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B.
Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \qquad \text{avec} \qquad A(-1) \neq 0$$

- Montrer que $k = 2$ et que A est constant.
En déduire que $\lambda = 3$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que -1 et 1 sont racines de B. En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.

3° <u>Étude d'un cas particulier</u>
Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.

a) Montrer que g est un endomorphisme de F.

b) Écrire la matrice A de g relativement à la base $\mathbf{B}$.

c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

d) Expliciter alors A^n en fonction de n.

EXERCICE 2

On désigne par x un nombre réel tel que $x > 1$ et l'on se propose d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1.$$

Lorsque la série converge, sa somme est notée :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1° **Étude de la dérivabilité de *f***

a) Justifier la convergence de la série définissant f.

b) Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de : $n^{\frac{x+1}{2}} \cdot \ln^2(n) \cdot u_n(x)$.

En déduire la convergence de la série de terme général : $\ln^2(n) \cdot u_n(x)$ et, a fortiori, la convergence de la série de terme général : $\ln(n) \cdot u_n(x)$.

c) Pour $x > 1$ et pour tout réel h tel que : $|h| \leq \frac{x-1}{2}$ montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\left| u_n(x+h) - u_n(x) + h \cdot \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \ln^2(n)$$

. puis que :

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

d) En déduire que f est dérivable sur $]\,1\,,+\infty\,[$; donner l'expression de la dérivée de f sous la forme de somme d'une série.

2° **Représentation de *f***

a) Pour $x > 1$ et pour k entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que, pour tout entier $N > 1$:

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N} \frac{dt}{t^x}$$

b) Prouver alors que :

$$1+\frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1+\frac{1}{x-1}$$

c) Préciser les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs supérieures et quand x tend vers plus l'infini.

d) Déduire des questions précédentes les variations de f, et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4 cm. On admettra à cet effet que :

$$f(2)=\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad f(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

PROBLÈME

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement a et b boules (a et b sont deux entiers naturels non nuls).

On procède alors à l'expérience suivante : on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne, en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est q, que la probabilité de choisir B est p, avec $p + q = 1, p \in]0, 1[$.

On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose : $x = \dfrac{q}{p}$.

A) Étude d'une suite récurrente

On considère la suite U définie par la relation de récurrence suivante :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\text{(I)} \qquad U_n = p \cdot U_{n+1} + q \cdot U_{n-1}$$

U_0 et U_{a+b} étant deux réels donnés.

1° Prouver que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$p \cdot \left(U_{n+1} - U_n \right) = q \cdot \left(U_n - U_{n-1} \right)$$

2° Lorsque $p = q$, montrer que la suite U est arithmétique. En déduire U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b}.

3° Lorsque p est différent de q, montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \quad U_n = \lambda + \mu \cdot x^n$$

Déterminer U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b}.

B) Étude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Soit k entier tel que $0 \leq k \leq a + b$.

On note E_k l'événement : "à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A, l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide". Ainsi :

$$P(E_0) = 1 \ , \ P(E_{a+b}) = 0$$

Et enfin, on note A l'événement : "le tirage se fait dans l'urne A".

1° Pour k entier tel que $1 \leq k \leq a+b-1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.

2° *a)* En utilisant les résultats du **A)**, calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne A.

b) Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque b tend vers plus l'infini.
Interpréter ce résultat lorsque $p < q$.

c) Pour p différent de q, déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque p tend vers 0,5.

3° Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B ?

4° Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer ?

C) <u>Étude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer</u>

Pour k entier tel que $0 \leq k \leq a+b$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B, à partir d'un contenu initial de k boules dans l'urne A. Si l'expérience est sans fin, on pose $X_k = -1$, et alors, d'après la question **B) 4°**, on sait que $P(X_k = -1) = 0$. On admet que X_k possède une espérance que l'on note $E\left(X_k\right)$. Ainsi :

$$E\left(X_0\right) = 0 \text{ et } E\left(X_{a+b}\right) = 0$$

- Soit A_1 (resp. B_1) l'événement "l'expérience se termine parce que l'urne A (resp. B) est vide". On note P_{A_1} (resp. P_{B_1}) la probabilité conditionnelle sachant A_1 (resp. B_1).

1° Pour j entier naturel non nul et $1 \leq k \leq a+b-1$, montrer que :

$$P_{A_1}\left(X_k = j\right) = q \cdot P_{A_1}\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P_{A_1}\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

et :

$$P_{B_1}\left(X_k = j\right) = q \cdot P_{B_1}\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P_{B_1}\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

puis que :

$$P\left(X_k = j\right) = q \cdot P\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

En déduire :

$$E\left(X_k\right) = 1 + q \cdot E\left(X_{k-1}\right) + p \cdot E\left(X_{k+1}\right)$$

2° Pour $p = q$:

a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha \cdot k^2$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 \; : \; E\left(Y_k \right) = \frac{1}{2} \cdot E\left(Y_{k+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot E\left(Y_{k-1} \right)$$

b) En utilisant le **A)**, montrer que $E\left(X_a \right) = ab$.

3° Pour p différent de q :

a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta \cdot k$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 \; : \; E\left(Z_k \right) = p \cdot E\left(Z_{k+1} \right) + q \cdot E\left(Z_{k-1} \right)$$

b) En utilisant le **A)**, montrer que :

$$E\left(X_a \right) = \frac{1}{p-q} \left(\frac{(a+b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a \right)$$

c) Quelle est la limite de $E\left(X_a \right)$ quand p tend vers 0,5 ? (on pourra poser : $x = 1 + y$)

d) Quelle est la limite de $E\left(X_a \right)$ quand b tend vers plus l'infini dans le cas $p < q$?