3. PROBLÈME

Le but de ce problème (dont *les trois parties sont indépendantes*) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps.
On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives f et g, $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,dx$$

À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X.

3.1. Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t=0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1, soit par A_2.
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($i = 1$, 2 ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$;
- les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes ;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

3.1.1. Étude d'un événement

On se propose de calculer la probabilité de l'événement E :"A_3 quitte la mairie en dernier".

1. Montrer que la variable X_2' définie par $X_2' = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1,0]$.

2. On admet l'indépendance de X_1 et X_2'.
Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1 définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.
On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
En déduire Φ_1, fonction de répartition de Y_1.

3. Calculer la fonction de répartition, Φ_2, de la variable Z_1 définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, φ_2, de Z_1.

4. On admet l'indépendance de Z_1 et $-X_3$.

   a. Calculer une densité de probabilité, φ_3, de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $\{Z_1 - X_3 \leqslant 0\}$.
   Quelle est la probabilité de E ?

3.1.2. Étude d'une variable aléatoire

On pose :

$$T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$$

1. Que représente T_3 pour A_3 ?

2. Calculer la fonction de répartition, F, de $\inf(X_1, X_2)$.
   En déduire une densité de probabilité, f, de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \end{cases}$$

   est une densité de probabilité de T_3.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3.

3.2. Étude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public.
n personnes A_1, A_2, ..., A_n se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la loi de U_n. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

2. On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la fonction de répartition de V_n. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

3. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t.
   Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

3.3. Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public.
Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite N, X_1, X_2, ..., X_n, ... de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i $(i \in \mathbb{N}^*)$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0,1[$).
N personnes A_1, A_2, ..., A_N se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple :
- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, S, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

2. Soit x un réel strictement positif. Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $\{S \leqslant x\}$ soit réalisé sachant que l'événement $\{N = n\}$ l'est.

   a. En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul).
   Donner une densité de probabilité de S.
   Reconnaître la loi de S.

   b. Montrer que :
   $$E(S) = E(X_i)E(N)$$

⚠ Attention, à l'époque on ne soulevait aucun problème au niveau de la convolution...

PROBLÈME

3.1 Etude de deux guichets

3.1.1. Etude d'un événement.

Rappel. Si Y est une var sur $(\Omega,\mathcal{B},p)$ et si Y suit une loi uniforme sur $[a,b]$:

$$\forall y\in\mathbb{R},\ F_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\in]-\infty,a[\text{ (ou }]-\infty,a]) \\ \dfrac{y-a}{b-a} \text{ si } y\in[a,b] \\ 1 \text{ si } y\in]b,+\infty[\text{ (ou } [b,+\infty[)\end{cases}$$ et on peut prendre :

$$\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\notin[a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ si } y\in[a,b]\end{cases}$$

En particulier pour $a=0$ et $b=1$ on obtient, $\forall y\in\mathbb{R},\ F_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\in]-\infty,0[\\ y \text{ si } y\in[0,1] \\ 1 \text{ si } y\in[1,+\infty[\end{cases}$ et

$\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\notin[0,1] \\ 1 \text{ si } y\in[0,1]\end{cases}$

Pour $a=-1$ et $b=0$ on obtient : $\forall y\in\mathbb{R}, F_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\in]-\infty,-1[\\ y+1 \text{ si } y\in[-1,0] \\ 1 \text{ si } y\in[0,+\infty[\end{cases}$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 \text{ si } y\notin[-1,0] \\ 1 \text{ si } y\in[-1,0]\end{cases}$

Q1 Soit $x\in\mathbb{R}$. $F_{X_2'}(x)=p(X_2'\leq x)=p(-X_2\leq x)=p(X_2\geq -x)=1-p(X_2<-x)=1-p(X_2\leq -x)=1-F_{X_2}(-x)$

Si $-x<0$ alors $F_{X_2'}(x)=1-0=1$; si $-x\in[0,1]$, $F_{X_2'}(x)=1-(-x)$; si $-x\in]1,+\infty[$, $F_{X_2'}(x)=1-1$

donc $F_{X_2'}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,-1[\\ 1+x \text{ si } x\in[-1,0] \\ 1 \text{ si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$. donc X_2' suit une loi uniforme sur $[-1,0]$.

Nous retiendrons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{X_2'}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\notin[-1,0] \\ 1 \text{ si } x\in[-1,0]\end{cases}$.

Q2 Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_1(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\,f_{X_2'}(t-x)\,dx$. φ_1 est une densité de Y_1 car

$Y_1=X_1+X_2'$, et X_1 et X_2' sont indépendantes.

$f_{X_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\notin[0,1] \\ 1 \text{ si } x\in[0,1]\end{cases}$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_1(t)=\displaystyle\int_0^1 f_{X_2'}(t-x)\,dx \overset{\substack{u=t-x\,;\ du=-dx}}{=} \int_t^{t-1} f_{X_2'}(u)(-du)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = \int_{t-1}^{t} f_{X_2'}(u)\,du$. Notons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t-1 < t$!

Rappelons que $f_{X_2'}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin [-1,0] \\ 1 & \text{si } u \in [-1,0] \end{cases}$. Envisageons alors quatre cas.

1er cas.. $t \in]-\infty,-1[$. $[t-1,t] \subset]-\infty,-1[$. $\varphi_1(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$.

2ème cas.. $t \in [-1,0[$. Alors : $t-1 < -1$. $\varphi_1(t) = \int_{-1}^{t} 1\,du = t-(-1) = t+1 = 1-|t|$

3ème cas.. $t \in [0,1[$. Alors : $-1 \leq t-1 < 0$. $\varphi_1(t) = \int_{t-1}^{0} 1\,du = -(t-1) = 1-t = 1-|t|$

4ème cas.. $t \in [1,+\infty[$. Alors : $0 \leq t-1$. $\varphi_1(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

a un point près !

Par conséquent : $\forall t \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$, $\varphi_1(t) = 0$ et $\forall t \in [-1,1[$, $\varphi_1(t) = 1-|t|$.

Nous pouvons encore écrire que :

$\forall t \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi_1(t) = 0$ et $\forall t \in [-1,1]$, $\varphi_1(t) = 1-|t|$. On peut encore écrire $\begin{cases} \forall t \in [-1,1],\ \varphi_1(t) = 1-|t| \\ \forall t \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ \varphi_1(t) = 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt$

1er cas.. $x \in]-\infty,-1[$. $\phi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

2e cas.. $x \in [-1,0[$. $\phi_1(x) = \int_{-1}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt = \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{(1+x)^2}{2}$

3e cas.. $x \in [0,1[$. $\phi_1(x) = \int_{-1}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{x}$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}$$

4e cas.. $x \in [1,+\infty[$. $\phi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt = 1$

$\varphi_1(t) = 0$ si $t > 1$ et même pour $t \geq 1$

Résumons :

$\forall x \in]-\infty,-1[,\ \Phi_1(x)=0$; $\forall x\in[-1,0[,\ \Phi_1(x)=\frac{(1+x)^2}{2}$; $\forall x\in[0,1[,\ \Phi_1(x)=1-\frac{(1-x)^2}{2}$ et

$\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_1(x)=1$: On peut encore écrire la même chose en remplaçant $]-\infty,-1[$, $[-1,0[$, $[0,1[$ et $[1,+\infty[$ par $]-\infty,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,+\infty[$.

Q3 Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\Phi_2(x)=p(Z_1\leq x)=p(|Y_1|\leq x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ p(-x\leq Y_1\leq x) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Si $x\in\mathbb{R}^*_-$, $\Phi_2(x)=0$. Supposons x élément de $\mathbb{R}_+$

$\Phi_2(x)=p(-x\leq Y_1\leq x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)$ $\quad -x\in]-1,0]$

$\Phi_2(x)=$ * $x<1$. $\quad \Phi_2(x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)=1-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{(1+(-x))^2}{2}=1-(1-x)^2=2x-x^2$

* $x\geq 1$. $\quad \Phi_2(x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)=1-0=1$

Résumons.. $\forall x\in]-\infty,0[,\ \Phi_2(x)=0$; $\forall x\in[0,1[,\ \Phi_2(x)=2x-x^2$; $\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_2(x)=1$.

Nous pouvons encore écrire : $\forall x\in]-\infty,0],\ \Phi_2(x)=0$, $\forall x\in[0,1],\ \Phi_2(x)=2x-x^2$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_2(x)=1$

Φ_2 est alors continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Φ_2 est donc continue sur $\mathbb{R}$ et au moins dérivable sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ \Phi'_2(x)=0$ et $\forall x\in]0,1[,\ \Phi'_2(x)=2-2x$.

Φ'_2 est continue sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Tout ceci permet de dire que 1°.. Z_1 est une variable aléatoire à densité

2°.. si l'on pose $\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ f_2(x)=0$

et $\forall x\in[0,1],\ f_2(x)=2-2x$ on obtient une densité de Z_1.

$\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ f_2(x)=0$ et $\forall x\in[0,1],\ f_2(x)=2-2x$.

Q4 Z_1 et $-X_3$ sont indépendantes. Nous pouvons donc :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,f_{-X_3}(t-x)\,dx$$ en ayant posé :

$\forall u\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[,\ f_{-X_3}(u)=0$ et $\forall u\in[-1,0],\ f_{-X_3}(u)=1$ car $-X_3\hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$

d'après 3.1.1.Q2.

donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_3(t)=\displaystyle\int_0^1(2-2x)\,f_{-X_3}(t-x)\,dx \underset{\substack{u=t-x\\ x=t-u\\ dx=-du}}{=} \int_t^{t-1}(2-2(t-u))\,f_{-X_3}(u)(-du)=\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\,f_{-X_3}(u)\,du$

1er cas.. $t<-1$. $\varphi_3(t)=\displaystyle\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\times 0\,du=0$

2e cas.. $-1\leq t<0$; $t-1<-1$; $\varphi_3(t)=\displaystyle\int_{-1}^{t}(2-2t+2u)\,du=\big[(2-2t)u+u^2\big]_{-1}^{t}=(2-2t)t+t^2+2-2t-1$

$\varphi_3(t)=1-t^2$.

3e cas.. $0\leq t<1$; $t-1<0$; $\varphi_3(t)=\displaystyle\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\,du=\big[(2-2t)u+u^2\big]_{t-1}^{0}=-(2-2t)(t-1)-(t-1)^2$

$\varphi_3(t)=(t-1)^2$.

4e cas.. $1\leq t$; $\varphi_3(t)=\displaystyle\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\,f_{-X_3}(u)\,du=\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\times 0\,du=0$

$\varphi_3(t)=0$.

Résumons : $\forall t\in\,]-\infty,-1[$, $\varphi_3(t)=0$; $\forall t\in[-1,0[$, $\varphi_3(t)=1-t^2$; $\forall t\in[0,1[$, $\varphi_3(t)=(t-1)^2$; $\forall t\in[1,+\infty[$, $\varphi_3(t)=0$ ... ou $\forall t\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $\varphi_3(t)=0$; $\forall t\in[-1,0]$, $\varphi_3(t)=1-t^2$; $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_3(t)=(t-1)^2$

b) $P(\{Z_3-X_3\leq 0\})=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\varphi_3(t)\,dt=\int_{-1}^{0}(1-t^2)\,dt=\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)_{-1}^{0}=0-\Big(-1+\frac{1}{3}\Big)=\frac{2}{3}$.

$P(\{Z_3-X_3\leq 0\})=\dfrac{2}{3}$.

c) E est l'événement A_3 quitte la mairie le dernier signifie exactement que X_3 prend une valeur supérieure (ou égale ?) à $|X_1-X_2|$

donc $P(E)=\dfrac{2}{3}$.

3.1.2. Etude d'une variable aléatoire.

(Q1) T_1 n'est autre que le temps* passé par A_1 à la mairie.
* Temps minimum... il se peut que A_1 et une très très bonne copine à la mairie

(Q2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = p(\inf(X_1, X_2) \le x) = 1 - p(\inf(X_1, X_2) > x) = 1 - p(X_1 > x \cap X_2 > x)$

$F(x) = 1 - p(X_1 > x)\, p(X_2 > x)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes.

$F(x) = 1 - (1 - p(X_1 \le x))(1 - p(X_2 \le x)) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \underset{F_{X_1} = F_{X_2}}{=} 1 - (1 - F_{X_1}(x))^2$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F(x) = 1 - (1-0)^2 = 0$

$\forall x \in [0,1[$, $F(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) = 1 - (1-1)^2 = 1$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F(x) = 0$, $\forall x \in [0,1[$, $F(x) = 2x - x^2$, $\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) = 1$

Notons que : $F = \phi_2$.

Ainsi nous posons $f = \varphi_2$.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2 - 2x$.

(Q3) Notons encore que $\inf(X_1, X_2)$ et X_3 sont indépendantes, par conséquent on pose
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_{X_3}(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) f_{X_3}(x)\,dx$ on obtient une densité de T_3.

$f_{X_3}(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et 0 si $x \notin [0,1]$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_0^1 f(t-x)\,dx \underset{t-x=u}{=} \int_t^{t-1} f(u)(-du) = \int_{t-1}^{t} f(u)\,du$

1er cas.. Soit $t \in]-\infty, 0[$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

2e cas.. Soit $t \in [0,1[$. $t-1 < 0$

$\varphi(t) = \int_0^t (2-2u)\,du = [2u - u^2]_0^t = 2t - t^2$

3e cas.. Soit $t \in [1,2[$. $0 \le t-1$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{1} (2-2u)\,du = [2u-u^2]_{t-1}^{1} = 1 - (2(t-1) - (t-1)^2) = t^2 - 4t + 4$
$= (t-2)^2$

4e cas.. Soit $t \in [2, +\infty[$, $1 \le t-1$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

Finalement : $\forall t \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$, $\varphi(t) = 0$. $\forall t \in [0,1[$, $\varphi(t) = 2t - t^2$. $\forall t \in [1,2[$, $\varphi(t) = (t-2)^2$

mieux $\forall t \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$, $\varphi(t) = 0$. $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = 2t - t^2$. $\forall t \in [1,2]$, $\varphi(t) = (t-2)^2$

<u>Remarque</u>.. On pourrait aussi procéder de la manière suivante.

$\inf(X_1,X_2)$ et $Z_1 = |Y_1| = |X_1 - X_2|$ ont même loi. par conséquent $Z_1 - X_3$ et $\inf(X_1,X_2) - X_3$ ont même loi (en effet Z_1 et $-X_3$ sont indépendantes et $\inf(X_1,X_2)$ et $-X_3$ sont indépendantes...) Ainsi $Z_1 - X_3 + 1$ et $\inf(X_1,X_2) - X_3 + 1$ ont même loi ; ne reste plus qu'à remarquer que X_3 et $1 - X_3$ ont même loi donc $T_3 = \inf(X_1,X_2) + X_3$ a même loi que $\inf(X_1,X_2) - X_3 + 1$ donc que $Z_1 - X_3 + 1$. Par conséquent si φ_1 est une densité de $Z_1 - X_3$, $t \mapsto \varphi_1(t-1)$ est une densité de T_3 ... on retrouve ainsi φ.

Notons que φ est continue sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent $t \mapsto t\varphi(t)$ et $t \mapsto t^2\varphi(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et nulles sur $]-\infty,0]$ et $[2,+\infty[$.
Cela suffit pour dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt$ converge et vaut $\int_0^2 t\varphi(t)dt$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$ converge également et vaut $\int_0^2 t^2\varphi(t)dt$.

Par conséquent T_3 possède une espérance et une variance.

$$\int_0^2 t\varphi(t)dt = \int_0^1 t(2t-t^2)dt + \int_1^2 t(t-2)^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2\right]_1^2 = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

Donc $\underline{\underline{E(T_3) = \frac{5}{6}}}$.

$$\int_0^2 t^2\varphi(t)dt = \int_0^1 t^2(2t-t^2)dt + \int_1^2 t^2(t-2)^2dt = \int_0^1 (2t^3-t^4)dt + \int_1^2 (t^4-4t^3+4t^2)dt$$

$$\int_0^2 t^2\varphi(t)dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right]_1^2 = \frac{3}{10} + \frac{8}{15} = \frac{5}{6}. \quad E(T_3^2) = \frac{5}{6}$$

$V(T_3) = \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$. $\underline{\underline{V(T_3) = \frac{5}{36}}}$.

3. 2. Etude de n guichets.

Q1 $U_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_{U_n}(x) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \le x) = 1 - P(\min(X_1,\dots,X_n) > x) = 1 - P(X_1>x \cap X_2>x \cap \dots \cap X_n>x)$

Par indépendance mutuelle : $F_{U_n}(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k>x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$

. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_{U_n}(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^n = 1 - e^{-\lambda n x}$; $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $F_{U_n}(x) = 0$.

Ainsi U_n suit une loi exponentielle de paramètre λn.

$E(U_n) = \dfrac{1}{\lambda n}$ et $V(U_n) = \dfrac{1}{(\lambda n)^2}$.

Q2 $V_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{V_n}(x) = p(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) = p((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x))$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{V_n}(x) = p(X_1 \leq x) p(X_2 \leq x) \dots p(X_n \leq x)$ par indépendance.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{V_n}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{V_n}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n$.

Notons que F_{V_n} est continue et dérivable sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Donc F_{V_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins dérivable, en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $F'_{V_n}(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $F'_{V_n}(x) = n(-(-\lambda) e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$

F'_{V_n} est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Toute ceci permet de dire que V_n est une variable aléatoire à densité qui admet pour densité g définie par :

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $g(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$.

Rappel .. $b \in \mathbb{R}^*_+$ et $\tau \in \mathbb{R}^*_+$ .. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre b et τ, X admet pour densité f_X définie par

$f_X(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0]$ et $f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{b}} x^{\tau - 1}}{b^\tau \Gamma(\tau)}$

Ceci permet d'affirmer que : $\int_0^{+\infty} e^{-x/b} x^{\tau-1} dx$ existe et vaut $b^\tau \Gamma(\tau)$.

En particulier $\forall a \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{p-1} dx$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(p)}{a^p} = \dfrac{(p-1)!}{a^p}$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $xg(x) = 0$. $\int_{-\infty}^{0} xg(x)dx$ converge et vaut 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $xg(x) = n\lambda\, x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} = n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} (-1)^k x\, (e^{-\lambda x})^{k+1} = n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(-1)^k x e^{-\lambda(k+1)x}$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(k+1)x} x\, dx$ converge et vaut $\dfrac{1!}{(\lambda(k+1))^2}$.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} xg(x)dx$ converge (combinaison linéaire d'intégrales convergentes) et

vaut $n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} (-1)^k \dfrac{1}{\lambda^2 (k+1)^2} = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} \underbrace{\dfrac{n}{k+1} C_{n-1}^{k}}_{C_n^{k+1}} = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$

Donc <u>V_n possède une espérance et $E(V_n) = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$.</u>

$\boxed{\text{mieux}}$ $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k C_n^{k+1} dx = \int_0^1 \dfrac{1}{-x} \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^{k+1} C_n^{k+1} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-x} \sum_{k=1}^{n} (-x)^k C_n^k dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^n - 1}{-x} dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc <u>$E(V_n) = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.</u>

Q3 Notons que la probabilité pour que A_k ait terminé sa démarche à l'instant t est : $p(X_k \leq t) = F_{X_k}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Notons que $A_1, A_2, \dots, A_n$ accomplissent leur démarche de manière indépendante.

Par conséquent <u>W_t suit une loi binômiale de paramètres n et $1-e^{-\lambda t}$.</u>

<u>$E(W_t) = n(1-e^{-\lambda t})$.</u>

3.3. Etude d'un guichet

Q1 Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc $X_k \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda},1)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $X_k\hookrightarrow\Gamma(\frac{1}{\lambda},1)$ et $X_1,X_2,\dots,X_n$ mutuellement indépendantes donc : $X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.

Posons $\forall x\in]-\infty,0]$, $f_n(x)=0$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_n(x)=\dfrac{e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(1/\lambda)^n\Gamma(n)} = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(n-1)!}$

f_n est une densité de probabilité de $X_1+X_2+\dots+X_n$

Remarque.. Posons $\forall x\in]-\infty,0[$, $\hat{f}_n(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $\hat{f}_n(x)=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(n-1)!}$. $\hat{f}_n$ est encore une densité de probabilité de $X_1+X_2+\dots+X_n$ (qui coïncide avec f_n pour $n\geq 2$!).

Q2 Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$p(S\leq x / N=n) = \frac{p(\{S\leq x\}\cap\{N=n\})}{p(N=n)} = \frac{p(\{X_1+X_2+\dots+X_n\leq x\}\cap\{N=n\})}{p(N=n)} = \frac{p(\sum_{i=1}^n X_i\leq x)\,p(N=n)}{p(N=n)}$$

donc $p(S\leq x/N=n) = p(\sum_{i=1}^n X_i\leq x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-\lambda t}t^{n-1}\,dt$

a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $(\{N=n\})_{n\geq 1}$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements,

$$p(S\leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(S\leq x/N=n)\,p(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-\lambda t}t^{n-1}\,dt\; pq^{n-1}$$

En admettant que l'on peut permuter [illegible] :

$$p(S\leq x) = p\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}q^{n-1}\right)e^{-\lambda t}\,dt = p\lambda\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}t^nq^n e^{-\lambda t}\,dt$$

$$p(S\leq x) = p\lambda\int_0^x e^{\lambda tq-\lambda t}\,dt = \int_0^x \lambda p\, e^{-\lambda p t}\,dt = \left[-e^{-\lambda p t}\right]_0^x = 1-e^{-\lambda p x}$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $p(S\leq x)=1-e^{-\lambda p x}$. Or évidemment $\forall x\in\mathbb{R}_-$, $p(S\leq x)=0$

Par conséquent S suit une loi exponentielle de paramètre λp.

b) $E(S)=\dfrac{1}{\lambda p} = E(X_1)E(N)$!   Exercice.. Justifier la permutation.