Exercice 1

Q1 a) $Z_n(\Omega)=\{-1,1\}$ donc $a_n+b_n=p(Z_n=-1)+p(Z_n=1)=1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n+b_n=1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $Z_{n+1}=Z_nX_{n+1}$, remarquons encore que Z_n et X_{n+1} sont indépendantes car $Z_n=\prod_{i=1}^{n}X_i$ et $(X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Ainsi : $p(Z_{n+1}=-1)=p\big((\{Z_n=-1\}\cap\{X_{n+1}=1\})\cup(\{Z_n=1\}\cap\{X_{n+1}=-1\})\big)$

Par incompatibilité et indépendance il vient alors :

$a_{n+1}=p(Z_{n+1}=-1)=p(Z_n=-1)p(X_{n+1}=1)+p(Z_n=1)p(X_{n+1}=-1)$

$a_{n+1}=a_n(1-p)+b_np=(1-p)a_n+pb_n$

De même :

$b_{n+1}=p(Z_{n+1}=1)=p\Big(\big(\{Z_n=-1\}\cap\{X_{n+1}=-1\}\big)\cup\big(\{Z_n=1\}\cap\{X_{n+1}=1\}\big)\Big)$

$b_{n+1}=p(Z_n=-1)p(X_{n+1}=-1)+p(Z_n=1)p(X_{n+1}=1)=a_np+b_n(1-p)=pa_n+(1-p)b_n$

Donc $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p)a_n+pb_n\\ pa_n+(1-p)b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\mathcal{Q}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ où $\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}$.

Q2 a) En clair (!) montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists!\, p_n\in\,]0,1[$, $\mathcal{Q}^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

Montrons l'existence par récurrence.

→ C'est clair pour $n=1$ en posant $p_1=p$ et en rappelant que : $0<p<1$.

→ Supposons que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe p_n dans $]0,1[$ tel que $\mathcal{Q}^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

Montrons que ceci vaut encore pour $n+1$.

$$\mathcal{Q}^{n+1}=\mathcal{Q}^n\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p_n)(1-p)+p_np & (1-p_n)p+p_n(1-p)\\ p_n(1-p)+(1-p_n)p & p_np+(1-p_n)(1-p)\end{pmatrix}$$

$$\varphi^{n+1}=\begin{pmatrix} 1-p_n-p+2pp_n & p_n+p-2pp_n \\ p_n+p-2pp_n & 1-p_n-p+2pp_n \end{pmatrix}$$

Si l'on pose $p_{n+1}=p_n+p-2pp_n$; $\varphi^{n+1}=\begin{pmatrix} 1-p_{n+1} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & 1-p_{n+1}\end{pmatrix}$.

Vérifions que $p_{n+1}\in]0,1[$.

$0<p_n<1$ et $1-p>0$ donc $0<p_n(1-p)<1-p$;

$0<1-p_n<1$ et $p>0$ donc $0<(1-p_n)p<p$;

En ajoutant il vient : $0<p_n(1-p)+(1-p_n)p<1-p+1$; c'est à dire :

$0<p_n+p-2pp_n<1$ c'est à dire $0<p_{n+1}<1$. Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists\, p_n\in]0,1[, \varphi^n=\begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

L'unicité est claire ; en effet soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que

$\varphi^n=\begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\hat{p}_n & \hat{p}_n \\ \hat{p}_n & 1-\hat{p}_n\end{pmatrix}$ avec $p_n\in]0,1[$ et $\hat{p}_n\in]0,1[$

clairement : $p_n=\hat{p}_n$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists!\, p_n\in]0,1[, \varphi^n=\begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

---

b) Ce qui précède a montré que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}=(1-2p)\,p_n+p$

$(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique.

Notons que si $x\in\mathbb{R}$: $x=(1-2p)x+p \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2p)p_n+p-(1-2p)\times\frac{1}{2}+p=(1-2p)(p_n-\frac{1}{2})$.

$(p_n-\frac{1}{2})_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $1-2p$ et de premier terme $p_1-\frac{1}{2}=p-\frac{1}{2}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_n-\frac{1}{2}=(1-2p)^{n-1}(p-\frac{1}{2})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = (1-2p)^{n-1}\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$

c) $p \in]0,1[$, donc $-1 < 2p-1 < 1$; $|2p-1| < 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1-2p)^{n-1}\right) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \varphi^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_{n-1} & p_{n-1} \\ p_{n-1} & 1-p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (1-p_{n-1})p + p_{n-1}(1-p)$ et $b_n = p_{n-1}p + (1-p_{n-1})(1-p)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n-1} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = (1-\frac{1}{2})p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}p + (1-\frac{1}{2})(1-p) = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n = -1) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Q3) $Z_1 = X_1$ et $Z_2 = X_1 X_2$

Supposons Z_1 et Z_2 indépendantes.

$p(\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 1\}) = p(Z_1 = 1)p(Z_2 = 1)$

$p(\{X_1 = 1\} \cap \{X_1 X_2 = 1\}) = b_1 b_2 = (1-p)\left[p \times p + (1-p)(1-p)\right]$

$\hookrightarrow p(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = (1-p)(p^2 + 1 - 2p + p^2) = (1-p)(2p^2 - 2p + 1)$

comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$(1-p)^2 = p(X_1 = 1)p(X_2 = 1) = (1-p)(2p^2 - 2p + 1)$; $p \in]0,1[$ donc $1-p = 2p^2 - 2p + 1$.

Ainsi $0 = 2p^2 - p = p(2p-1)$. Donc $p = 1/2$.

Réciproquement supposons $p = 1/2$. $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$. $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_1+b_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Donc $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1/2$. Rappelons que $Z_2 = X_1 X_2$

$p(\{Z_1=1\} \cap \{Z_2=1\}) = p(\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\}) = p(X_1=1)p(X_2=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = p(Z_1=1)\,p(Z_2=1)$.

$p(\{Z_1=1\} \cap \{Z_2=-1\}) = p(\{X_1=1\} \cap \{X_2=-1\}) = p(X_1=1)\,p(X_2=-1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = p(Z_1=1)\,p(Z_2=-1)$

On montre de la même manière que : $p(\{Z_1=-1\} \cap \{Z_2=1\}) = p(Z_1=-1)\,p(Z_2=1)$ et

$p(\{Z_1=-1\} \cap \{Z_2=-1\}) = p(Z_1=-1)\,p(Z_2=-1)$. Ainsi Z_1 et Z_2 sont indépendantes

Finalement <u>Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$.</u>

Remarque. On pouvait se contenter de montrer que $p(\{Z_1=1\} \cap \{Z_2=1\}) = p(Z_1=1)\,p(Z_2=1) \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ ...

On pouvait aussi remarquer que $Q = \begin{pmatrix} p(Z_2=-1/Z_1=-1) & p(Z_2=-1/Z_1=1) \\ p(Z_2=1/Z_1=-1) & p(Z_2=1/Z_1=1) \end{pmatrix}$

On suppose que $p = 1/2$. <u>$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n = 1/2$.</u> (d'après la formule de Q 2 b)

Rappelons que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Z_{i+1} = Z_i X_{i+1}$ ou $X_{i+1} = \frac{Z_{i+1}}{Z_i}$ et que $Z_1 = X_1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$

$p(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = p\left(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, X_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \dots, X_n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right)$

Par indépendance on obtient :

$p(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = p(X_1 = \varepsilon_1)\,p\left(X_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \cdots p\left(X_n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right)$. Remarquons que :

$\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$, ..., $\varepsilon_n/\varepsilon_{n-1} \in \{-1, 1\}$.

Ainsi <u>$p(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$.</u>

Notons que, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $p(Z_i = \varepsilon_i) = \frac{1}{2}$

Ainsi si $p = \frac{1}{2}$: $\forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $p(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = p(Z_1 = \varepsilon_1)\,p(Z_2 = \varepsilon_2) \cdots p(Z_n = \varepsilon_n)$.

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ sont indépendantes.

Si $p = \frac{1}{2}$, <u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.</u>

Récap <u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.</u>

EXERCICE 2

(Q1) Soit $f \in E$. Notons φ_f une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_x^{x+1} f(t)dt$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x, x+1]$

Par conséquent F est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \varphi_f(x+1) - \varphi_f(x)$.

φ_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_f = f$; par une composition banale, $x \mapsto \varphi_f(x+1)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto \varphi'_f(x+1)$. Par soustraction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \varphi'_f(x+1) - \varphi'_f(x) = f(x+1) - f(x)$; en particulier F est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement <u>1°.. F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>2°.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.</u>

(Q2) <u>a)</u> $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)dt = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi t)\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi(x+1)) - \cos(2\pi x)\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x)\right] = 0.$$

<u>Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.</u>

<u>b)</u> $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = 1-x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ainsi :

$\forall x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = 1-x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Ainsi f est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ car $x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Donc f est continue en tout point de $]-\infty, 1[$ et de $]1, +\infty[$ et f est continue à droite et à gauche en 1.

Finalement f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

c) <u>f est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

Afin de déterminer F observons que

- Si $x \in]-\infty, 0[$, $[x, x+1] \subset]-\infty, 1[$
- Si $x \in [1, +\infty[$, $[x, x+1] \subset [1, +\infty[$
- Si $x \in [0, 1[$, $x < 1 \leq x+1$

Rappelons encore que $x \mapsto -\frac{1}{2}(1-x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 1-x$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x-1}$ sur $[1,+\infty[$

Soit $x \in]-\infty,0[$ (ou $]-\infty,0]$!)

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{x+1}(1-t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{x+1}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Soit $x \in [1,+\infty[$

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{x+1}\sqrt{t-1}\,dt=\left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_x^{x+1}=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}.$$

Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{1} f(t)\,dt+\int_1^{x+1} f(t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{1}+\left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_1^{x+1}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{2}{3}x^{3/2}$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2 \text{ si } x \in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{2}{3}x^{3/2} \text{ si } x \in [0,1[\text{ ou } [0,1] \\ \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \text{ si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$

Q3 a) Soit f et g deux éléments de E et λ un réel.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=\int_x^{x+1}(\lambda f+g)(t)\,dt=\lambda\int_x^{x+1} f(t)\,dt+\int_x^{x+1} g(t)\,dt=\lambda T(f)(x)+T(g)(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=(\lambda T(f)+T(g))(x)$; $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$.

Ainsi T est une application linéaire de E dans E (d'après Q1, $\forall f \in E,\ T(f) \in E$).

b) d'après Q2 a) si l'on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x)=\sin(2\pi x)$:

$f_0 \in E$, $f_0 \neq 0_E$ et $T(f_0)=0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T \neq \{0_E\}$.

T n'est pas injective.

D'après Q1, si f est un élément de E, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\operatorname{Im} T$ est contenu dans l'espace vectoriel E_1 des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pas dérivable en 0. Donc $h \in E$ et $h \notin E_1$, ainsi $h \in E$ et $h \notin \operatorname{Im} T$.

T n'est pas surjective.

Q4 a) T n'est pas injective donc 0 est valeur propre de T.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = e^{ax}$. $f_a \in E$ et $f_a \neq 0_E$. Supposons $a \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a} e^{at}\right]_x^{x+1} = \frac{1}{a}\left[e^{a(x+1)} - e^{ax}\right] = \frac{1}{a}(e^a - 1)e^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f_a)(x) = \frac{1}{a}(e^a - 1) f_a(x)$; $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a) = \frac{e^a - 1}{a} f_a$

Ainsi $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur $\frac{e^a - 1}{a}$ si $a \in \mathbb{R}^*$

Supposons $a = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} 1\,dt = 1 = 1 \times f_0(x)$; $T(f_0) = 1 \times f_0$ et $f_0 \neq 0_E$

Ainsi $f_0 : x \mapsto 1$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1.

Finalement $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre

$$\lambda(a) = \begin{cases} \frac{e^a - 1}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}.$$

c) λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\lim_{a \to 0} \lambda(a) = \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1 = \lambda(0)$

$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \lambda'(a) = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - (e^a - 1)\right] = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - e^a + 1\right]$.

$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $e^a - 1 = a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $\frac{e^a - 1}{a} = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$.

$\lambda(a) = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$; $\frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a}{2} - 1 + o(a)\right] = \frac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi $\lim_{a \to 0} \frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{2}$; λ est dérivable en 0 et $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour étudier le signe de λ' sur $\mathbb{R}^*$ posons $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) = e^a a - e^a + 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}$, $u'(a) = e^a a + e^a - e^a = a e^a$. Notons que $u(0) = 0$.

a	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(a)$		$-$	0	$+$	
$u(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) \geq 0$; mieux $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $u(a) > 0$

Donc λ' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ car $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$

Par conséquent λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\lim\limits_{a \to +\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{e^a}{a} - \frac{1}{a}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{a}(e^a - 1)\right) = 0$

λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, λ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\lambda(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Par conséquent d'après b) tout élément de $]0, +\infty[$ est une valeur propre de T

Comme 0 est également une valeur propre de T : tout réel positif est valeur propre de T.