PROBLÈME

PARTIE A

Q1 a) Soit f une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$. Soit $a \in D$. Une récurrence aisée donne :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a+n \in D$ et $f(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots a\, f(a)$.

Supposons que D contienne un entier négatif ou nul x.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x+n \in D$ et $f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\, f(x)$.

Posons alors $n = 1-x$. $n \in \mathbb{N}^*$ et $x+n = 1$

Ainsi $1 = f(1) = f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\, f(x) = 0$ car $x+n-1 = 0$!!

Ceci conduit une légère contradiction qui montre qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en x entier négatif ou nul.

b) $D = \mathbb{N}^*$ et $f : n \mapsto (n-1)!$

- f est définie en 1 et $f(1) = 0! = 1$
- Soit $x \in D$. $x \in \mathbb{N}^*$ donc $x+1 \in \mathbb{N}^* = D$; de plus $f(x+1) = x! = x\,(x-1)! = x\, f(x)$.

Ainsi f a la propriété $\mathcal{P}$.

Q2 a) Rappelons que le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}^*_+$, que
$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Tout ceci suffit largement pour dire que Γ possède la propriété $\mathcal{P}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$.

- C'est clair pour $n = 1$ car $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.
  $\Gamma(x+n+1) = (x+n)\,\Gamma(x+n) \underset{\text{H.R.}}{=} (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$ ce qui achève la récurrence.

Q3 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$. $A_{n+1}(x) = \dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \dfrac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = A_n(x)$.

Ainsi la suite $(A_n(x))_{n\geq 1}$ est constante ... Q2 b) donne aussi $A_n(x) = \Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n.

b) Soit $x \in E = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$. $x+n > 0 \Leftrightarrow n > -x$

Si $x > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x+n > 0$; on pourra poser $N_x = 0$.

Si $x \leq 0$ on posera $N_x = E(-x)+1$

dans les deux cas pour tout $n \in [\![N_x, +\infty[\![$, $x+n>0$

$(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq N_x$. Ainsi $x+n+p>0$ et par conséquent : $A_{n+p}(x)$ et $A_p(x+n)$ ont un sens.

$$A_{n+p}(x) = \frac{\Gamma(x+n+p)}{x(x+1)\cdots(x+n+p-1)} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \times \frac{\Gamma(x+n+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}$$

Ainsi $\underline{A_{n+p}(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} A_p(x+n)}$.

Or $A_p(x+n)$ ne dépend pas de p car $x+n>0$; par conséquent $A_p(x+n) = A_1(x+n)$

ou encore : $A_p(x+n) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x+n}$.

Donc $A_{n+p}(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \times \frac{\Gamma(x+n+1)}{x+n} = \frac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = A_n(x)$

Ainsi $\underline{\forall n \in [\![N_x, +\infty[\![,\ \forall p \in \mathbb{N},\ A_{n+p}(x) = A_n(x)}$.

<u>c)</u> $D = E$, ainsi si $x \in D$, $x+1 \in D$.

Soit $x \in E$. Choisissons n dans $\mathbb{N}$ tel que : $n > N_x$ et $n > N_{x+1}$

$$\tilde{\Gamma}(x+1) = A_n(x+1) = \frac{\Gamma(x+1+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = x\,\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

$\tilde{\Gamma}(x+1) = x\,A_n(x) = x\,\tilde{\Gamma}(x)$.

Ne reste plus qu'à remarquer que $1 \in D$ et que $\tilde{\Gamma}(1) \overset{n > N_1}{=} A_n(1) = \frac{\Gamma(n+1)}{1(2)\cdots(1+n-1)} = \frac{n!}{n!} = 1$

Donc $\underline{\tilde{\Gamma} \text{ a la propriété } \mathcal{P}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x+1>0$ donc $\tilde{\Gamma}(x) = A_1(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{x\,\Gamma(x)}{x} = \Gamma(x)$.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)}$.

Soit $x\in E$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $x+p>0$.

$\tilde{\Gamma}(x)=A_p(x)=\dfrac{\Gamma(x+p)}{x(x+1)\cdots(x+p-1)}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x+n+p>0$ donc $\tilde{\Gamma}(x+n)=A_p(x+n)=\dfrac{\Gamma(x+n+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}$

Notons que d'après Q2 b) : $\Gamma(x+n+p)=(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)\,\Gamma(x+p)$

Ainsi :

$$\tilde{\Gamma}(x+n)=\frac{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}\,\Gamma(x+p)\quad\text{or}\quad \Gamma(x+p)=x(x+1)\cdots(x+p-1)\,\tilde{\Gamma}(x)$$

$$\tilde{\Gamma}(x+n)=\frac{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)(x+p-1)\cdots(x+1)x}{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+n+1)(x+n)}\,\tilde{\Gamma}(x)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\tilde{\Gamma}(x)$$

donc $\underline{\underline{\forall x\in E,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \tilde{\Gamma}(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\ \tilde{\Gamma}(x)}}$.

Q4 a) Posons $\forall t\in]0,1]$, $u(t)=\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ et $\forall t\in[1,+\infty[$, $v(t)=t\ln t\,e^{-t}$

- u est continue sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{t\to 0^+}\left(t^{3/4}\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)=\lim\limits_{t\to0^+}(t^{1/4}\ln t)=0$; ainsi :

$\exists\alpha\in]0,1]$, $\forall t\in]0,\alpha]$, $\left|t^{3/4}\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|\leq 1$; $\forall t\in]0,\alpha]$, $\left|\dfrac{\ln t}{\sqrt t}\right|\leq\dfrac{1}{t^{3/4}}$

La convergence de $\displaystyle\int_0^\alpha\frac{dt}{t^{3/4}}$ et la positivité de $t\mapsto\left|\dfrac{\ln t}{\sqrt t}\right|$ donnent la convergence

de $\displaystyle\int_0^\alpha\left|\frac{\ln t}{\sqrt t}\right|dt$ et donc de $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{\ln t}{\sqrt t}\right|dt$

$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt t}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

- v est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus :

$$\lim_{t\to+\infty}(t^2v(t))=\lim_{t\to+\infty}(t^3\ln t\,e^{-t})=0\quad\text{par croissance comparée.}$$

Donc $\exists A\in[1,+\infty[$, $\forall t\in[A,+\infty[$, $0\leq t^3\ln t\,e^{-t}\leq 1$ ou $0\leq v(t)\leq\dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et la positivité de v montrent alors la convergence de $\int_A^{+\infty} v(t)dt$ et donc la convergence de $\int_1^{+\infty} v(t)dt$.

Comme v est positive sur $[1,+\infty[$ on a ainsi l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty} v(t)dt$

Ainsi : $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_1^{+\infty} t\ln t\, e^{-t}dt$ sont absolument convergentes.

b) * Fixons t dans $]0,1[$.

Posons alors $\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ h_t(x)=h(t,x)=t^{x-1}=e^{(x-1)\ln t}$

h_t est continue et dérivable sur $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$.

$$\forall x\in]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[,\ |h_t'(x)|=|\ln t\, e^{(x-1)\ln t}|=|\ln t|\, e^{(x-1)\ln t} \underset{\substack{\uparrow \\ \ln t<0 \text{ et } x-1\geq -\frac{1}{2}}}{\leq} |\ln t|\, e^{-\frac{1}{2}\ln t}=\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h_t :

$\forall (x,y)\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[^2,\ |h_t(x)-h_t(y)|\leq \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}|x-y|$

En particulier $\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h_t(x)-h_t(1)|\leq |x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$, c'est-à-dire :

$\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq |x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$; et ceci pour tout t dans $]0,1[$.

Par conséquent : $\forall t\in]0,1[,\ \forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq |x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$.

* Fixons t dans $[1,+\infty[$. Posons encore : $\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ h_t(x)=h(t,x)=e^{(x-1)\ln t}$

h_t est continue et dérivable sur $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$.

$$\forall x\in]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[,\ |h_t'(x)|=|\ln t\, e^{(x-1)\ln t}| \underset{\substack{\uparrow \\ t\geq 1}}{=} \ln t\, e^{(x-1)\ln t} \underset{\substack{\uparrow \\ \ln t\geq 0 \text{ et } x-1\leq 1}}{\leq} \ln t\, e^{\ln t}=t\ln t$$

Ainsi l'inégalité des accroissements finis nous donne :

$\forall (x,y)\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[^2,\ |h_t(x)-h_t(y)|\leq |x-y|\, t\ln t$

En particulier $\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h_t(x)-h_t(1)|\leq |x-1|\, t\ln t$; donc :

$\forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq |x-1|\, t\ln t$ et ceci pour tout t dans $[1,+\infty[$.

$\forall t\in [1,+\infty[,\ \forall x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq |x-1|\, t\ln t$.

c) Soit x un élément de $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$. Notons que $\Gamma(x)-\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})dt$

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|=|h(t,x)-h(t,1)|e^{-t}$

- $\forall t\in]0,1[,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\leq |x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}$; mieux (!) :

$\forall t\in]0,1],\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\leq|x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}$

d'après Q4 a), $\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$ converge. Comme $t\mapsto|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|$ est positive sur $]0,1]$: $\int_0^1|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt$ converge. Ainsi $\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})dt$ est absolument convergente. Nous pouvons alors écrire :

$$\left|\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})dt\right|\leq\int_0^1|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt\leq|x-1|\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

- $\forall t\in[1,+\infty[,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|=|h(t,x)-h(t,1)|e^{-t}\leq|x-1|\ t\ln t\ e^{-t}$

La convergence de $J=\int_1^{+\infty}(t\ln t\,e^{-t})dt$ et la positivité de $t\mapsto|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|$ montrent l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt$. Ainsi pouvons nous écrire :

$$\left|\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})dt\right|\leq\int_1^{+\infty}|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt\leq|x-1|\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}\,dt=|x-1|\,J$$

$$|\Gamma(x)-\Gamma(1)|=\left|\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|\leq\left|\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})dt\right|+\left|\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|$$

$$|\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq|x-1|\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}\,dt+|x-1|\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}\,dt$$

Posons $K=\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}\,dt+\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}dt$. $|\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq K|x-1|$

$$\underline{\exists K\in\mathbb{R},\ \forall x\in]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[,\ |\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq K|x-1|.}$$

$\lim_{x\mapsto1}(K|x-1|)=0$; il vient alors par encadrement : $\lim_{x\mapsto1}(\Gamma(x)-\Gamma(1))=0$

donc $\lim_{x\mapsto1}\Gamma(x)=\Gamma(1)$. <u>$\Gamma$ est continue en 1.</u>

Q5 $\forall x\in E,\quad \Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ d'après Q3 c].

Donc $\lim\limits_{x\mapsto 0}(x\Gamma(x))=\lim\limits_{x\mapsto 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=0!=1$

Ainsi $\Gamma(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x}$.

Cherchons un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de $-n$ (et non pas de $x=-n$!!) pour n dans $\mathbb{N}^*$. Soit x un élément de E. Posons $y=x+n$.

$\Gamma(y)=\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(y)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}=\frac{y\,\Gamma(y)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}=\frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}$$

$\lim\limits_{x\mapsto -n}((x+n)\Gamma(x+n))=\lim\limits_{y\mapsto 0}(y\Gamma(y))=1$ et $\lim\limits_{x\mapsto -n}\frac{1}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n+1)(-n)}$

Donc $\Gamma(x)\underset{-n}{\sim}\frac{1}{(x+n)(-1)(-2)\cdots(-n+1)(-n)}=\frac{1}{(x+n)(-1)^n n!}$

$\Gamma(x)\underset{-n}{\sim}\frac{1}{(-1)^n n!}\,\frac{1}{x+n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et même $\mathbb{N}$.

Q6 a] Soit $x\in\mathbb{R}$.

Pour $n\geqslant N_x$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ car $x+n>0$.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=x$ car $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\mapsto+\infty}{\sim}n\times\frac{x}{n}=x$

Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

b] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $n!=n\Gamma(n)\underset{n\mapsto\infty}{\sim}n\,n^{n-1}e^{-n}\sqrt{2\pi n}=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

c) Soit $x \in E$

$$\Gamma(x+n) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} (x+n)^{x+n-1} e^{-(x+n)} \sqrt{2\pi(x+n)} \quad \text{et} \quad \Gamma(n) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n^{n-1} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Donc
$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{(x+n)^{x-1}}{n^{x-1}} \times \frac{e^{-(x+n)}}{e^{-n}} \times \frac{(x+n)^n}{n^n} \times \frac{\sqrt{2\pi(x+n)}}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \left(\frac{x+n}{n}\right)^{x-1} \times e^{-x} \times \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sqrt{\frac{x+n}{n}}.$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{x+n}{n}\right)^{x-1} = \lim_{n\mapsto+\infty} e^{(x-1)\ln(1+\frac{x}{n})} = 1. \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt{\frac{x+n}{n}} = 1.$$

Ainsi
$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} 1 \times e^{-x} \times e^x \times 1 = 1. \quad \underline{\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = 1.}$$

d) Soit $x \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x)$.

$$1 \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = \frac{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x)}{n^x\,(n-1)!} = \frac{n}{x+n}\,\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}{n!\,n^x}\,\Gamma(x)$$

$$1 \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} 1 \times \frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}{n!\,n^x}\,\Gamma(x) \; ; \quad \frac{n!\,n^x}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \Gamma(x)$$

Donc $\forall x \in E$,
$$\underline{\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x).}$$

PARTIE B Q1 Soit x un réel positif. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g_k(x) > 0$

Notons que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{e^{x/n}}{1+x/n} = 1.$

Donc
$$u_n(x) = \ln(g_n(x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} g_n(x) - 1 = \frac{e^{x/n} - 1 - x/n}{1 + x/n} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n}.$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0.

Donc $e^x - 1 - x \underset{x\mapsto 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; ainsi
$$u_n(x) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{n^2}.$$

$u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{n^2} > 0$ et la série de terme général

$\dfrac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

la série de terme général $u_n(x) = \ln g_n(x)$ converge et ceci pour tout x dans E.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(G_n(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(g_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

La série de terme général $u_n(x)$ étant convergente, la suite de terme général

$\ln(G_n(x))$ converge ; la fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, la

suite de terme général $G_n(x)$ converge

Pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ $\underline{\lim_{n \to +\infty} G_n(x)}$ existe ... et est finie ... et même strictement positive.

Q2 Soit $x \in E \cap]-\infty, 0[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \dfrac{e^{x/n}}{1 + x/n}$

Si $x + n > 0$: $g_n(x) > 0$ donc $\forall n \in [\![N_x, +\infty [\![$, $g_n(x) > 0$.

$\forall n \in [\![N_x, +\infty [\![$, $G_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{N_x - 1} g_k(x) \times \prod_{k=N_x}^{n} g_k(x)$

Un raisonnement analogue au précédent permet de prouver que $\left(\displaystyle\prod_{k=N_x}^{n} g_k(x) \right)_{n \geq N_x}$

converge. Ainsi la suite $\underline{(G_n(x))_{n \geq 1}}$ converge pour tout x dans $E \cap]-\infty, 0[$.

Mieux $\underline{(G_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge pour tout } x \text{ dans } E.}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Q3 $\ln G_n(1) = \ln \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} g_k(1) \right] = \ln \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{e^{1/k}}{1 + 1/k} \right) \right]$

$\ln(G_n(1)) = \ln\left(e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) + \ln \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \ln \dfrac{1}{n+1}$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(G_n(1)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1).}$

Notons γ la limite de la suite $\left(\ln(G_n(1))\right)_{n\geq 1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = G_n(1) + \ln(n+1) - \ln n = G_n(1) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma + 0 = \gamma$

Reste à prouver que : $\gamma > 0$.

Commençons par montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $e^x > x-1$.

$\varphi : x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le théorème des accroissements finis donne alors :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists c_x\in\,]0,x[$, $\dfrac{e^x-e^0}{x-0} = e^{c_x}$ $\quad(\varphi'=\varphi\ !)$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists c_x\in\,]0,x[$, $\dfrac{e^x-1}{x} = e^{c_x} > 1$; $e^x-1 > x$; $e^x > x+1$.

Ainsi $\underline{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ e^x > x+1.}$

$\frac{x}{n+1} > 0$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\dfrac{G_{n+1}(x)}{G_n(x)} = g_{n+1}(x) = \dfrac{e^{x/(n+1)}}{1+\frac{x}{n+1}} > 1$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_n(x) > 0$ et $\dfrac{G_{n+1}(x)}{G_n(x)} > 1$; ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_{n+1}(x) > G_n(x)$.

La suite $(G_n(x))_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante. ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient alors la stricte croissance de $\left(\ln(G_n(x))\right)_{n\geq 1}$.

Donc $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\ln(G_n(1)) \underset{\text{croiss...}}{>} \ln G_1(1) = \ln g_1(1) = \ln\frac{e}{2} = 1-\ln 2$

Donc $\underline{\gamma > 0}$

Remarque.. Il est aisé de montrer que $(v_n)_{n\geq1}$ est strictement décroissante. Ainsi

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(G_n(1)) < \gamma < v_n$; $1-\ln 2 < \gamma < 1$!

Notons que $\gamma \simeq 0,577$

Q4 Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x) =$

$(x+n)\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)(x\,\Gamma(x))$. $\quad \dfrac{x\,\Gamma(x)}{(x+n)\Gamma(x+n)} = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}$

Or $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{e^{x/k}}{1+x/k} = \left(\prod_{k=1}^{n}k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}\right)e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}} = n!\,\dfrac{x\,\Gamma(x)}{(x+n)\Gamma(x+n)}\,e^{x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

Donc $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = x\,\Gamma(x)\,\dfrac{n!\,e^{x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(x+n)\Gamma(x+n)}$.

Q5 Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Gamma(x) = G_n(x) \times \dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} \times \dfrac{\Gamma(n)}{n!} \times (x+n) \times e^{-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \times n^x \times \dfrac{1}{x}$

Remarquons que $\dfrac{\Gamma(n)}{n!} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ et que $e^{-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\,n^x = e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)}$

Donc $\Gamma(x) = G_n(x)\,\dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} \times \dfrac{x+n}{n} \times e^{-x v_n} \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} = 1$ et, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x+n}{n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-x v_n}\right) = e^{-\gamma x}$.

Ainsi, pour tout x dans E, $\Gamma(x) = \dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\,G(x)$.