J. 0691

ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 2000

Option scientifique

MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

m est un entier supérieur ou égal à 3. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^m$ à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. **Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.**

Si M est une matrice, on note ${}^tM$ sa transposée. On rappelle que pour deux matrices M et N, ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

Si M est une matrice carrée d'ordre m, on note respectivement E_M et F_M le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dont la matrice dans la base canonique est M.

$\mathbb{R}^m$ est muni de son produit scalaire canonique défini pour deux vecteurs X et Y par : $(X \mid Y) = {}^tX\,Y$.

La norme euclidienne d'un vecteur X, associée à ce produit scalaire, est notée $\|X\|$.

Soit n un entier supérieur ou égal à -1. On dit qu'une matrice A carrée d'ordre m est de type n si ${}^tA = A^n$.

1) a) Qu'est-ce qu'une matrice de type 0, de type 1 ?

b) Donner un exemple, sous forme de tableau, de matrice non diagonale de type -1.

On suppose désormais que n est strictement plus grand que 1.

2) Dans cette question seulement on suppose m = 3.

Soit x un nombre réel et N (x) la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier strictement positif k on a : $(N(x))^k = N(kx)$.

b) Déterminer alors les réels x tels que N (x) soit une matrice de type n.

On revient au cas général m quelconque et on considère maintenant une matrice A carrée d'ordre m et de type n. On se propose d'établir quelques propriétés de A.

3) a) Etablir l'égalité $A^{(n^2)} = A$.

b) On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$ et que B est une matrice symétrique.

c) Que peut-on en déduire quant aux valeurs propres de B ?

d) Soit V un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. En calculant ${}^tV\,B\,V$ de deux manières différentes montrer que l'on aboutit à une contradiction et qu'ainsi -1 ne peut pas être valeur propre de B.

e) Montrer que B est une matrice de projecteur orthogonal.

4) a) Montrer que E_B est inclus dans E_A puis que $E_B = E_A$.

b) Montrer que $F_A = F_B$ et que E_A et F_A sont supplémentaires orthogonaux.

5) Soit U un vecteur de F_A. Montrer que $\|AU\| = \|U\|$.

6) Montrer que si A est inversible et de type n alors A est aussi de type -1.

7) Montrer que si A est à la fois de type n et de type n+1 alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

Exercice 2

a et b sont deux réels strictement positifs, s est un réel vérifiant $0 < s < 1$.

1) a) Etablir la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\, du$.

b) Calculer J. (On pourra, par exemple, calculer au préalable aJ.)

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre b.
On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des Y_k et suivant la loi géométrique de paramètre s. On admet que Z définie par $Z = \mathrm{Max}(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si ω est un élément de Ω alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels :

$$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_{N(\omega)}(\omega)$$

2) Soit j un entier strictement positif et t un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z \leq t / N = j)$.

3) a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une densité de Z.

4) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}$.

Seul le résultat de la question 4) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.

5) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(t) = \frac{t \cdot \exp(-t)}{1 - \exp(-t)}$ pour $t > 0$.

a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

b) Etablir, pour tout réel t appartenant à $[0, +\infty[$ et tout entier n positif, l'égalité :

$$g(t) = g(t) \cdot \exp(-(n+1) \cdot t) + \sum_{k=0}^{k=n} t \cdot \exp(-(k+1) \cdot t)$$

6) Justifier la convergence, pour tout entier positif k, de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cdot \exp(-(k+1) \cdot t)\, dt$ et la calculer.

7) Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ est convergente et égale à $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

8) On admet que la somme de cette série est $\frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$, c'est-à-dire $\int_0^1 \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}\, ds$, est égale à $\frac{\pi^2}{6b}$.

Tournez la page S.V.P.

Problème

p est un réel vérifiant $0 < p < 1$.

Une entreprise dispose de N copies d'un logiciel. Une proportion p de ces disquettes est infectée par un virus. Il est malheureusement impossible de discerner une copie saine d'une copie contaminée.

On suppose que le nombre N peut s'écrire $N = nm$, n et m étant deux entiers strictement supérieurs à 1.

Un des responsables du service statistiques propose la méthode suivante pour assainir le lot :

Les N copies initiales forment la génération 0.

On prélève n disquettes au hasard et avec remise dans la génération 0, on les copie chacune en m exemplaires. Les $nm = N$ disquettes ainsi obtenues constituent la génération 1.

On procède de la même façon pour fabriquer la génération 2 à partir de la génération 1, la génération 3 à partir de la génération 2, etc. Durant tout le processus, la copie d'une disquette saine est saine, celle d'une disquette contaminée est automatiquement contaminée.

Le statisticien pense que si la proportion p initiale est faible, on a de bonnes chances d'obtenir un lot sain après un assez grand nombre d'opérations. L'objet de ce problème est de vérifier ou d'infirmer cette conjecture.

Résultat préliminaire

On considère un couple de variables aléatoires (X , Y) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que u et t sont deux entiers strictement positifs.

On suppose que X prend u valeurs réelles $x_1, x_2, \dots, x_u$ et que Y prend t valeurs réelles $y_1, y_2, \dots, y_t$.

g désigne une fonction définie sur IR.

Pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq u$, on définit le réel E_j par : $E_j = \sum_{i=1}^{i=t} g(y_i)\, P(Y = y_i \,/\, X = x_j)$.

$E(g(Y))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $g(Y)$.

Démontrer que $E(g(Y)) = \sum_{j=1}^{j=u} E_j\, P(X = x_j)$.

fin du préliminaire

k désigne dans tout le problème un entier positif ou nul.

On note T_k le nombre de disquettes infectées obtenues parmi les n disquettes tirées dans la génération k pour constituer la génération k + 1.

1) a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T_k ?

b) Pour j décrivant l'ensemble de ces valeurs, déterminer la loi conditionnelle de la variable T_{k+1} sachant que l'événement $(T_k = j)$ est réalisé.

2) a) En déduire, à l'aide du résultat préliminaire, une relation entre $E(T_{k+1})$ et $E(T_k)$.

b) Montrer alors que pour tout entier positif k on a : $E(T_k) = np$.

3) On considère maintenant la variable aléatoire $Z_k = T_k(n - T_k)$.

a) En utilisant le préliminaire avec le couple (T_k, T_{k+1}) et une fonction g convenablement choisie, montrer que la suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique.

b) Donner l'expression de $E(Z_k)$ en fonction de n , k et p.

c) Montrer que la suite de terme général $E(Z_k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

4) a) Que signifie concrètement l'événement $(Z_k = 0)$?

b) Quelle est la plus petite valeur de $j(n-j)$ quand j décrit l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$?

c) En déduire, à l'aide de 3) c), que $P(0 < T_k < n)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

d) Calculer la limite de $P(Z_k = 0)$ quand k tend vers l'infini et interpréter ce résultat.

e) Déterminer, <u>en fonction de n uniquement</u>, une valeur de k telle que $P(Z_k = 0) > 0{,}99$.

5) On cherche maintenant à calculer la probabilité de l'événement F suivant :

F = "A partir d'un certain rang, les générations ne sont constituées que de disquettes infectées."

a) Montrer que la suite d'événements $((T_k = n))_{k>0}$ est croissante pour l'inclusion.

b) Que représente alors P (F) pour la suite $(P(T_k = n))_{k>0}$?

6) Soit j un entier vérifiant $0 < j < n$. Déterminer la limite de $P(T_k = j)$ quand k tend vers l'infini.

7) En utilisant le résultat de la question 2), donner la valeur de P (F).

8) On cherche maintenant à calculer la probabilité de l'événement G suivant :

G = " A partir d'un certain rang, les générations ne sont constituées que de disquettes saines."

a) Calculer P (G).

b) Que pensez-vous de la méthode proposée par le statisticien ?

9) Reprendre les questions 1) , 2) , 3) dans le cas de tirages sans remise.
Le fait que les tirages se fassent avec ou sans remise a-t-il une influence sur les résultats obtenus dans ce problème ?

FIN DE L'EPREUVE.