Q1) Notons que $T(1) = 3 \times 1^3 - 1^2 - 1 - 1 = 0$ donc que 1 est racine de T.

$T(X) = (X^3 - X^2) + (X^3 - X) + (X^3 - 1) = (X-1)X^2 + (X-1)X(X+1) + (X-1)(X^2+X+1)$.

$T(X) = (X-1)(X^2 + X^2 + X + X^2 + X + 1)$.

$T(X) = (X-1)(3X^2 + 2X + 1)$.

Le discriminant réduit du trinôme $3X^2+2X+1$ est : $1-3=-2$; ainsi $3X^2+2X+1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

<u>1 est la seule racine réelle de T.</u>

Les racines non réelles de T sont les racines de $3X^2+2X+1$ c'est à dire

$\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$. Leur somme est $-\dfrac{2}{3}$ et leur produit $\dfrac{1}{3}$.

"$-\dfrac{b}{a}$" "$\dfrac{c}{a}$"

Ainsi $\underline{\underline{\alpha+\bar{\alpha} = -\dfrac{2}{3} \text{ et } \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{1}{3}}}$.

Q2) <u>a)</u> Soit A un élément de $\mathbb{C}[X]$ et B un élément <u>non nul</u> de $\mathbb{C}[X]$.

Il existe un couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ et un seul tel que :

$$\begin{cases} A = QB + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}.$$

<u>b)</u> • Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ et soit (P_1, P_2) un couple d'éléments de $\mathbb{C}[X]$.

$\exists!\,(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X]^2$, $P_1 = Q_1 T + R_1$ et $\deg R_1 < \deg T$. $R_1 = \varphi(P_1)$.

$\exists!\,(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X]^2$, $P_2 = Q_2 T + R_2$ et $\deg R_2 < \deg T$. $R_2 = \varphi(P_2)$.

Alors 1) $\lambda P_1 + P_2 = (\lambda Q_1 + Q_2)T + \lambda R_1 + R_2$

2) $\lambda Q_1 + Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda R_1 + R_2 \in \mathbb{C}[X]$

3) $\deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg T$ car $\deg R_1 < \deg T$ et $\deg R_2 < \deg T$.

Ainsi $\lambda R_1 + R_2$ est le reste dans la division de $\lambda P_1 + P_2$ par T.

Alors $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2$ or $\lambda R_1 + R_2 = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.

Donc $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.

Ceci achève de prouver que φ est linéaire.

• Par définition φ est une application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.

φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

c... le reste dans la division de T par T est $0_{\mathbb{C}[X]}$; $T \in \ker\varphi$ et $T \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

φ n'est pas injectif. En fait $\ker\varphi = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid T \text{ divise } P\}$.

. $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg \varphi(P) < \deg T \leq 3$; $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_2[X]$.

Ainsi $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{C}_2[X]$; $\operatorname{Im}\varphi \neq \mathbb{C}[X]$.

φ n'est pas surjectif. En fait $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}_2[X]$.

Il est clair que L_1, L_2 et L_3 sont des éléments de $\mathbb{C}_2[X]$.

Q3 a) Soit $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $a'L_1 + b'L_2 + c'L_3 = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

$(a'L_1 + b'L_2 + c'L_3)(1) = 0$; $c'L_3(1) = 0$ car $L_1(1) = L_2(1) = 0$.

Or $L_3(1) = (1-\alpha)(1-\bar\alpha) \neq 0$; ainsi $c' = 0$.

En utilisant α (resp. $\bar\alpha$) on montre de la même manière que $b' = 0$ (resp. $a' = 0$).

$\forall (a', b', c') \in \mathbb{C}^3$, $a'L_1 + b'L_2 + c'L_3 = 0_{\mathbb{C}[X]} \Rightarrow a' = b' = c' = 0$.

(L_1, L_2, L_3) est alors une famille libre de $\mathbb{C}_2[X]$. Comme $\mathbb{C}_2[X]$ est de dimension 3 et que (L_1, L_2, L_3) est une famille de cardinal 3, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b) $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_2[X]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^n) \in \mathbb{C}_2[X]$. Comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!\,(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$, $\varphi(X^n) = a_nL_1 + b_nL_2 + c_nL_3$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\exists Q_n \in \mathbb{C}[X]$, $\quad X^n = Q_n T + \varphi(X^n) = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

Rappelons que 1, α et $\bar\alpha$ sont les racines de T.

Alors $\quad 1^n = Q_n(1)T(1) + a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = c_n L_3(1) = c_n(1-\alpha)(1-\bar\alpha)$

Ainsi $\quad c_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\bar\alpha)}$.

En utilisant α et $\bar\alpha$ on obtient de la même manière $\quad b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar\alpha)}$

et $a_n = \dfrac{\bar\alpha^n}{(\bar\alpha-1)(\bar\alpha-\alpha)}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \dfrac{\bar\alpha^n}{(\bar\alpha-1)(\bar\alpha-\alpha)}$, $b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar\alpha)}$ et $c_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\bar\alpha)}$.

$(1-\alpha)(1-\bar\alpha) = 1-(\alpha+\bar\alpha)+\alpha\bar\alpha = 1-\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3} = 2$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{2}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ X^n = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ f^n = Q_n(f)\circ T(f) + a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$

Or $T(f)=\Theta$ donc $Q_n(f)\circ T(f)=\Theta$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

d) $\alpha\bar\alpha = \frac{1}{3}$; $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \bar\alpha^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n = \frac{1}{2}$.

Les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers les réels $0, 0, \frac{1}{2}$.

Q4 a) $h = aL_1(f)+bL_2(f)+cL_3(f) = \frac{1}{2}L_3(f)$.

$L_3(X) = (X-\alpha)(X-\bar\alpha) = X^2-(\alpha+\bar\alpha)X+\alpha\bar\alpha = X^2+\frac{2}{3}X+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3X^2+2X+1)$.

Alors $h = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(3f^2+2f+Id_E)$. $h = \frac{1}{6}(3f^2+2f+Id_E)$.

Voir également p 8'

b) $h\circ h = \frac{1}{36}(3f^2+2f+Id_E)\circ(3f^2+2f+Id_E) = \frac{1}{36}(9f^4+6f^3+3f^2+6f^3+4f^2+2f$ $+ 3f^2+2f+Id_E) = \frac{1}{36}(9f^4+12f^3+10f^2+4f+Id_E)$.

$3f^3 = f^2+f+Id_E$ et $9f^4 = 3f^3+3f^2+3f = f^2+f+Id_E+3f^2+3f = 4f^2+4f+Id_E$.

Alors $h^2 = \frac{1}{36}(4f^2+4f+Id_E+4f^2+4f+4Id_E+10f^2+4f+Id_E) = \frac{1}{36}(18f^2+12f+6Id_E) = h$.

$h\in\mathcal{L}(E)$ et $h\circ h = h$; h est un projecteur.

EXERCICE 2

2.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1]$, $(t-1)^2 \geqslant 0$; $\forall t \in [0,1]$, $t^2+1-2t \geqslant 0$.

$\forall t \in [0,1], 0 \leq t \leq \frac{1+t^2}{2}$; $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq t^n \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.

En intégrant il vient : $\int_0^1 t^n dt \leq a_n$; $\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq a_n$; $\frac{1}{n+1} \leq a_n$.

$\forall t \in [0,1]$, $t^2 \leq t$; $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^2+1}{2} \leq \frac{t+1}{2}$.

$\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^n \leq \frac{(t+1)^n}{2^n}$.

En intégrant il vient : $a_n \leq \frac{1}{2^n}\int_0^1 (t+1)^n dt = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2^n}\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

$a_n \leq \frac{1}{2^n}\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{2^n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$.

2.1.2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq a_n$. La série de terme général $\frac{1}{n+1}$ étant divergente, les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la divergence de la série de terme général a_n.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x| = 1 \Rightarrow |u_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n||x|^n = a_n$

Ainsi si x est un réel vérifiant $|x| = 1$: la série de terme général $u_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

2.1.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|x|^n}{n+1} \leq a_n |x|^n \leq \frac{2}{n+1}|x|^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|x|^n}{n+1} \leq |u_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}|x|^n \leq |x|^n$.

1er cas : $|x| < 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n(x)| \leq |x|^n$.

La convergence de la série de terme général $|x|^n$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|u_n(x)|$.

<u>2ème cas</u> .. $|x| \geqslant 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \geqslant \frac{|x|^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0$.

La divergence de la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la divergence de la série de terme général $|u_n(x)|$ ... on pouvait également remarquer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n(x)| = +\infty$ pour $|x|>1$.

Finalement <u>la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $|x|<1$.</u>

2.2 Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.

2.2.1 . Supposons x dans $[0,1[$.

$$\forall t \in [0,1],\ xt^2 \leqslant x\ ;\ \forall t \in [0,1],\ 2-x-xt^2 \underset{-xt^2 \geqslant -x}{\geqslant} 2-2x = 2(1-x) \underset{\begin{cases} 2 \geqslant 3/2 \\ 1-x>0 \end{cases}}{\geqslant} \frac{3}{2}(1-x)$$

. Supposons x dans $[-1,0[$.

$\forall t \in [0,1]$, $-xt^2 \geqslant 0$; $\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant 2-x$

$$\forall t \in [0,1],\ 2-x-xt^2 \geqslant 2-x = \frac{3}{2}(1-x) + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$$

Finalement : <u>$\forall x \in [-1,1[, \forall t \in [0,1],\ 2-x-xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$.</u>

2.2.2 x est élément de $[-1,1[$. $\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x) > 0$.

Alors $t \mapsto 2-x-xt^2$ est continue et non nulle sur $[0,1]$.

Ainsi $t \mapsto \dfrac{2}{2-x-xt^2}$ est continue sur $[0,1]$.

<u>Alors pour tout x dans $[-1,1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\,dt}{2-x-xt^2}$ existe.</u>

2.2.3 $x \in [-1,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^\ell dt \; x^\ell$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n} \left(x\left(\frac{1+t^2}{2}\right)\right)^\ell dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{1-\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x(1+t^2)}{2}} dt$.

$\frac{1+t^2}{2} x \neq 1$ car $0 < \frac{1+t^2}{2} \leq 1$ et $x < 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) = \int_0^1 \frac{2\left(1-\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}\right)}{2-x-xt^2} dt = f(x) - 2\int_0^1 \frac{\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{2-x-xt^2} dt$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x)\right| = \left|2\int_0^1 \frac{\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{2-x-xt^2} dt\right| \leq 2\int_0^1 \frac{\left|\frac{x(1+t^2)}{2}\right|^{n+1}}{2-x-xt^2} dt$

$\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) > 0$. $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{1}{2-x-xt^2} \leq \frac{2}{3}\frac{1}{1-x}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x)\right| \leq \frac{2}{3}\frac{1}{1-x} 2\int_0^1 |x|^{n+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x)\right| \leq \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt = \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)} a_{n+1} \leq \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)} \frac{2}{n+2}$.

Ainsi $\forall x \in [-1,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x)\right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$.

4\. $0 \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq \frac{8}{3(n+2)(1-x)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1,1[$.

Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} = 0$ ... pour tout $x \in [-1,1[$.

Toujours par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} \left(f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x)\right) = 0$ pour tout x dans $[-1,1[$.

Alors $\forall x \in [-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) = f(x)$.

Pour tout x dans $[-1,1[$, la série de terme général $u_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$

5. $a_0 = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^0 dt = \int_0^1 1\,dt = 1$. $\underline{\underline{a_0 = 1.}}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1} dt \underset{(1)}{=} \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t \times (k+1) \times t \times \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt.$

(1) IPP avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}$

$a_{k+1} = 1 - (k+1)\int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 1 - 2(k+1)\int_0^1 \left(\frac{t^2+1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt$

$a_{k+1} = 1 - 2(k+1)\left(a_{k+1} - \frac{1}{2}a_k\right) = 1 - 2(k+1)a_{k+1} + (k+1)a_k.$

Alors $(2(k+1)+1)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.}}$

6. Soit $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à $\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$ près.

Donc $\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près dès que

$\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq 10^{-p}$ ou dès que $\underline{\frac{|x|^{n+1}}{n+2} \leq \frac{3}{8}(1-x)\,10^{-p}}$ ou $|x|^{n+1} \leq \frac{3}{8}(1-x)10^{-p}(n+2)$

Rassurons nous en remarquant que $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+2} = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x) = a_k x^k = \frac{1+k a_{k-1}}{2k+1} x^k$. $u_0(x) = a_0 = 1$.

Le programme s'écrit alors sans difficulté. Voir p 8'

• $x\in\,]0,1[$. $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{2\,dt}{2-x-xt^2} = -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)^2} \underset{\text{décomposition en él. simples}}{=} -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\int_0^1\left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}-\frac{1}{t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right)dt.$

$$f(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\left[\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right|\right]_0^1=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{1+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right|=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right).$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2}{2-x-x}\right]=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{x+2-x+2\sqrt{x(2-x)}}{2-2x}\right).$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right).$$

• $x\in[-1,0[$. $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{2\,dt}{2-x-xt^2} = \int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{2-x-x\,\frac{x-2}{x}u^2}\,du=\frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{2-x}\int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\frac{du}{1+u^2}.$

$\left[\begin{array}{l} u=\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,t \\ \text{car } 2-x-xt^2=-x\left(t^2+\frac{x-2}{x}\right)\ldots\end{array}\right.$

$$f(x)=2\sqrt{\frac{2-x}{-x}}\,\frac{1}{2-x}\int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

Finalement : $\forall x\in[-1,0[$, $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$, $f(0)=1$ et

$\forall x\in\,]0,1[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right)$.

<u>Exercice</u> Montrer que le domaine de définition de $g: x\mapsto \displaystyle\int_0^1\frac{2\,dt}{2-x-xt^2}$ est $]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[$.

Montrer que $\forall x\in D_g$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[\\ 1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right) & \text{si } x\in\,]0,1[\end{cases}$

```
program ECRICOME_2002;

var p,k:integer;x,puis,s,a,stop:real;

begin
write('Donnez la valeur de x. x=');readln(x);
write('Donnez la valeur de p. p=');readln(p);

stop:=3*(1-x)/exp(p*ln(10))/8;

puis:=1;a:=1;s:=1;k:=0;

while  (abs(puis)*abs(x)>=(k+2)*stop)  do
      begin
      k:=k+1;
      a:=(1+k*a)/(k+k+1);
      puis:=puis*x;
      s:=s+puis*a;
      end;

writeln('Une valeur approchée est : ', s,' Elle obtenue pour k=',k);


if x>0 then begin
            s:=sqrt((2-x)*x);
            writeln('La valeur exacte est : ', 1/s*ln((1+s)/(1-x)));
            end
       else if x=0 then writeln('La valeur exacte est 1.')
                    else writeln('Valeur exacte : ',
                         2/sqrt(x*(x-2))*arctan(sqrt(x/(x-2))));

end.
```

Une remarque sur l'exercice 1 et un complément sur l'exercice 2

Ex 1 Q4 b), c'est à dire $h \circ h = h$, peut se faire sans calcul.

$h = \frac{1}{2} L_3(f)$. Notons que $T = 3(X-1)L_3$. Ainsi $3(f - 3\,\mathrm{id}_E) \circ L_3(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou $(f - 3\,\mathrm{id}_E) \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$! Alors $f \circ h = h$. Une récurrence simple donne alors :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ h = h$. Il est alors aisé de voir que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) \circ h = h$.

En posant $P = L_3$ on obtient $h \circ h = h$.

Ex 2 Il est finalement assez facile de calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}\,dt$ en distinguant trois cas.

- $x = 0$. $\displaystyle f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$.

PROBLÈME

3.1 Propriétés de la relation de référence.

1. a) $\forall (x,y) \in B,\ u(x,y) \geq u(x,y)$!

Pour tout (x,y) dans B, (x,y) est préféré ou indifférent à (x,y).

b) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B, \forall (x'',y'') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ et $u(x',y') \geq u(x'',y'') \Rightarrow u(x,y) \geq u(x'',y'')$

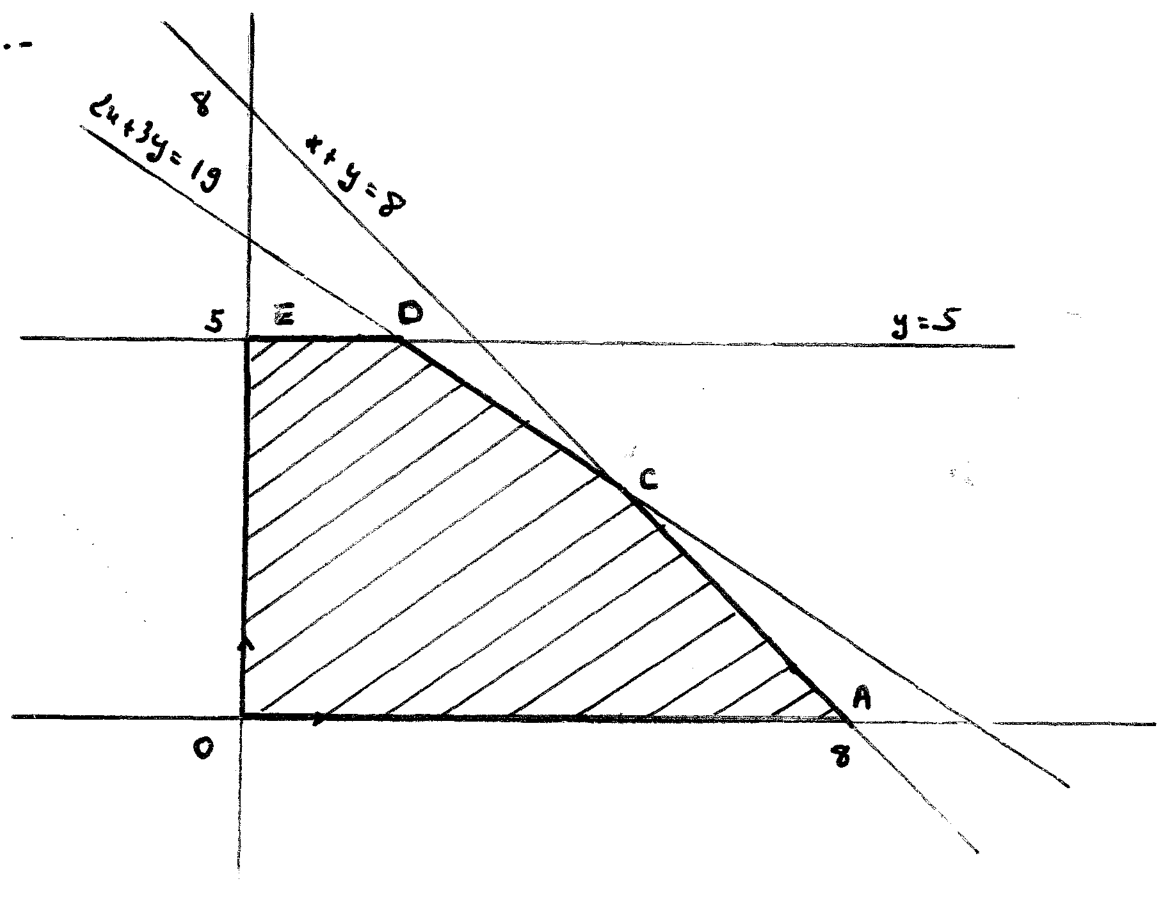
Si $(x,y), (x',y'), (x'',y'')$ sont trois éléments de B tels que (x,y) est préféré ou indifférent à (x',y') et (x',y') est préféré ou indifférent à (x'',y'') alors (x,y) est préféré ou indifférent à (x'',y'').

c) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ ou $u(x',y') \geq u(x,y)$!

Si (x,y) et (x',y') sont deux éléments de B, (x,y) est préféré ou indifférent à (x',y') ou (x',y') est préféré ou indifférent à (x,y).

3.2 Courbes d'indifférence

1. -



Notons que les droites d'équations $x+y=8$ et $2x+3y=19$ (resp. $2x+3y=19$ et $y=5$) se coupent au point C (resp. D) de coordonnées $(5,3)$ (resp. $(2,5)$).

Ainsi les cinq sommets du polygone constituant le bord de B sont les points

O, A, C, D, E de coordonnées $(0,0)$, $(8,0)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(0,5)$.

2. — a) Soit $(x,y) \in A_m$.

$u(x,y)=m \Leftrightarrow (y-3)e^{x+2}=m \Leftrightarrow y-3=me^{-(x+2)} \Leftrightarrow y=me^{-(x+2)}+3$.

La fonction f_m telle que, pour tout élément (x,y) de A_m, $y=f_m(x)$ est $x \mapsto me^{-(x+2)}+3$

b) $f_m : x \mapsto me^{-(x+2)}+3$.

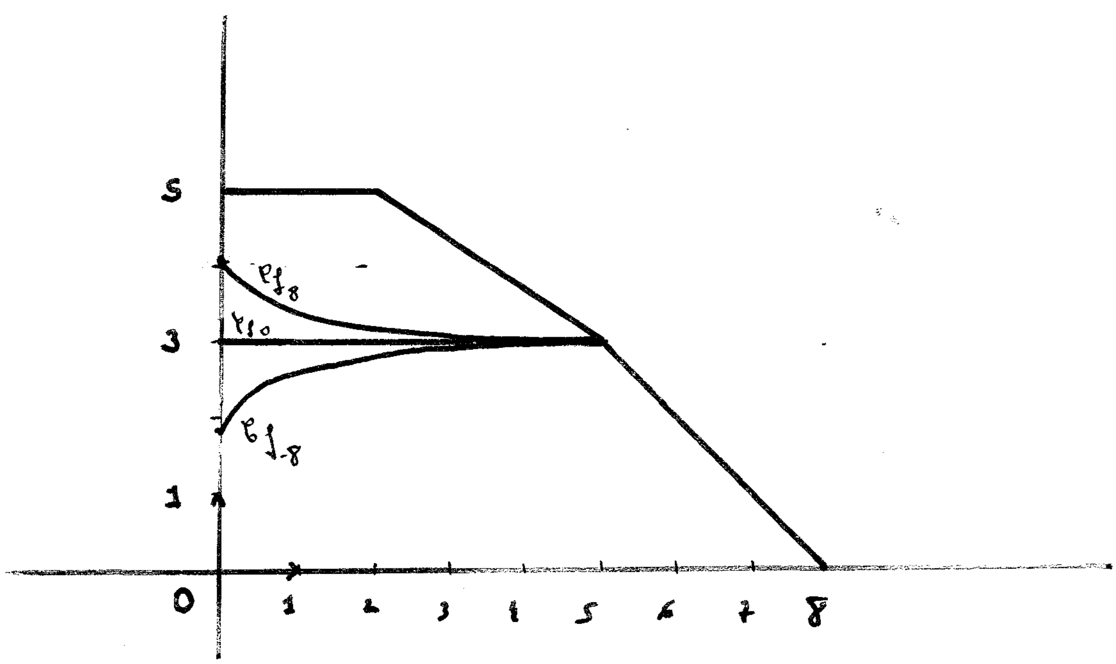
f_0 est constante et vaut 3. f_8 est décroissante sur $[0,8]$ et f_{-8} est croissante sur $[0,8]$

$f_8(0)=8e^{-2}+3 \simeq 4,12$; $f_8(1)=8e^{-3}+3 \simeq 3,4$; $f_8(2)=8e^{-4}+3 \simeq 3,16$; $f_8(3)=8e^{-5}+3 \simeq 3,056$

$f_8(4)=8e^{-6}+3 \simeq 3,016$; $f_8(5)=8e^{-7}+3 \simeq 3,008$

De même $f_{-8}(0) \simeq 1,88$; $f_{-8}(1) \simeq 2,6$; $f_{-8}(2) \simeq 2,84$; $f_{-8}(3) \simeq 2,944$; $f_{-8}(4) \simeq 2,984$

$f_{-8}(5) \simeq 2,992$.



c.. Soit m un réel.

T est tangente à la courbe représentative de f_m

$\Updownarrow$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = f_m(x) \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ f'_m(x) = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = m e^{-(x+2)} + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ -m e^{-(x+2)} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = \frac{2}{3} + 3 \\ x = \frac{1}{2}(19 - 3y) \\ m = \frac{2}{3} e^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = \frac{11}{3} \\ x = 4 \\ m = \frac{2}{3} e^{6} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3} e^{6}.$

<u>Il existe un réel m_0 et un seul tel que la courbe représentative de f_{m_0} soit tangente à la droite (T) d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$; $m_0 = \frac{2}{3}e^6$.</u>

Notons que dans ces conditions le point de "contact" est le point de coordonnées $(4, \frac{11}{3})$.

Voir la représentation graphique à la page précédente.

3.3 Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. Soit $(x,y) \in B$. $0 \leq x$, $0 \leq y \leq 5$, $2x + 3y \leq 19$ et $x + y \leq 8$.

$0 \leq y \leq 5$ et $0 \leq x = 8 - y \leq 8$; $|x| \leq 8$ et $|y| \leq 8$!

$\max(|x|, |y|) \leq 8$.

Alors B est contenu dans la boule fermée de centre O et de rayon 8 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Ainsi <u>B est fermé et borné.</u>

2.. $(x,y) \mapsto y-3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \mapsto e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($(x,y) \mapsto x+2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$)

Par produit $(x,y) \mapsto (y-3)e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi u est continue sur le fermé borné B. Alors u possède un maximum sur B.

$\exists\ (x_0,y_0)\in B,\ \forall (x,y)\in B,\ u(x_0,y_0)\geq u(x,y)$.

<u>Il existe donc un couple (x_0,y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x,y) de B.</u>

3.. $\mathring{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et u est de classe C^1 sur $\mathring{U}$ ($(x,y)\mapsto y-3$ et $(x,y)\mapsto e^{x+2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).

Si u possède un extremum local en un point (x,y) de $\mathring{U}$ alors $\operatorname{grad} u(x,y)=0$.

$$\forall (x,y)\in \mathring{U},\ \operatorname{grad} u(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)=\left((y-3)e^{x+2},\ e^{x+2}\right)\neq(0,0).$$

Ainsi <u>u n'admet pas d'extremum local sur $\mathring{B}$.</u>

Notons alors que u atteint son maximum en un point de $B-\mathring{B}$ et que

$B-\mathring{B}=\{(x,y)\in B \mid x=0\}\cup\{(x,y)\in B\mid y=0\}\cup\{(x,y)\in B\mid y=5\}\cup\{(x,y)\in B\mid 2x+3y=19\}\cup$
$\{(x,y)\in B\mid x+y=8\}$.

4. <u>a)</u> Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\in B \text{ et } 2x+3y=19 \iff \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ 0\leq x\\ 0\leq y\leq 5\\ x+y\leq 8\end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ x\geq 0\\ 0\leq \frac{1}{3}(19-2x)\leq 5\\ x+\frac{1}{3}(19-2x)\leq 8\end{cases}$$

$$(x,y)\in B \text{ et } 2x+3y=19 \iff \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ x\geq 0\\ 2\leq x\leq \frac{19}{2}=9{,}5\\ x\leq 24-19=5\end{cases} \iff \begin{cases} x\in[2,5]\\ y=\frac{1}{3}(19-2x)\end{cases}$$

Posons $F_3=\{(x,y)\in B\mid 2x+3y=19\}=\{(x,y)\in \ \mid x\in[2,5] \text{ et } y=\frac{1}{3}(19-2x)\}$.

$$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=\max_{x\in[2,5]} u\left(x,\tfrac{1}{3}(19-2x)\right)=\max_{x\in[2,5]}\left(\tfrac{1}{3}(19-2x)-3\right)e^{x+2}=\max_{x\in[2,5]}\frac{10-2x}{3}e^{x+2}$$

<u>Etudier le maximum de u sur B sous la contrainte $2x+3y=19$ c'est</u>
étudier le maximum de $x\mapsto \frac{10-2x}{3}e^{x+2}$ sur $[2,5]$.

b. Posons $\forall x\in[2,5]$, $g(x)=\frac{1}{3}(10-2x)e^{x+2}$

g est dérivable sur $[2,5]$ et $\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{1}{3}(-2+10-2x)e^{x+2}$

$\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{2}{3}(4-x)e^{x+2}$.

g est strictement décroissante sur $[4,5]$ et strictement croissante sur $[2,4]$.

Ainsi g admet un maximum sur $[2,5]$ atteint une fois et une seule en 4.

$$\max_{x\in[2,5]} g(x)=g(4)=\frac{2}{3}e^{6}.$$

$\max_{(x,y)\in F_1} u(x,y)=\frac{2}{3}e^{6}$; ce maximum est atteint en le seul point $\left(4,\frac{1}{3}(19-2\times4)\right)=\left(4,\frac{11}{3}\right)$.

5. • $F_2=\{(x,y)\in B \mid x+y=8\}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 0\le y\le 5\\ 2x+3y\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 0\le 8-x\le 5\\ 2x+24-3x\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 3\le x\le 8\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ \text{et}\\ 5\le x\le 8\end{cases}$$

$$\max_{(x,y)\in F_2} u(x,y)=\max_{x\in[5,8]} u(x,8-x)=\max_{x\in[5,8]}(8-x-3)e^{x+2}=\max_{x\in[5,8]}(5-x)e^{x+2}$$

Posons $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)=(5-x)e^{x+2}$. $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)\le\hat{g}(5)=0$

$\max_{x\in[5,8]}\hat{g}(x)=0$. $\max_{(x,y)\in F_2} u(x,y)=0$; $(5,3)$ est le seul point qui réalise ce maximum.

• $F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0,\ 0\le y\le 5,\ 3y\le 19,\ y\le 8\}$

$F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(0,y)\ ;\ y\in[0,5]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=\max_{y\in[0,5]} u(0,y)=\max_{y\in[0,5]}(y-3)e^{2}=2e^{2}$$

$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=2e^{2}$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,5)$.

- $F_4 = \{(x,y)\in B \mid y=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x,\ 2x\leq 19,\ x\leq 8 \text{ et } y=0\} = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,8]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = \max_{x\in[0,8]} u(x,0) = \max_{x\in[0,8]} (-3e^{x+2}) = -3e^2$$

$\max\limits_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = -3e^2$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,0)$.

- $F_5 = \{(x,y)\in B \mid y=5\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x,\ 2x+15\leq 19,\ x+y\leq 8,\ y=5\}$

$F_5 = \{(x,5)\ ;\ x\in[0,2]\}$.

$$\max_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = \max_{x\in[0,2]} u(x,5) = \max_{x\in[0,2]} 2e^{x+2} = 2e^4.$$

$\max\limits_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = 2e^4$ et ce maximum est atteint en le seul point $(2,5)$.

6. $$\max_{(x,y)\in B} u(x,y) = \max_{(x,y)\in B\setminus\mathring{B}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4\cup F_5} u(x,y) = \max\left\{\frac{2}{3}e^6, 0, 2e^2, -3e^2, 2e^4\right\}$$

$\max\limits_{(x,y)\in B} u(x,y) = \frac{2}{3}e^6 = u\left(4,\frac{11}{3}\right)$; $\left(4,\frac{11}{3}\right)$ est le seul point qui réalise ce maximum.

Le maximum de u sur B est $\frac{2}{3}e^6$ et il est atteint en le seul point $(x_0,y_0) = \left(4,\frac{11}{3}\right)$.

3.4 Etude de deux tests d'arrêts.

Partie 1.

1 a) $T_1(\Omega) = \{2,3,4\}$. Rappelons que X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes.

→ $p(T_1=2) = p(X_1\leq X_2) = \sum\limits_{k=1}^{3} p(\{X_1=k\}\cap\{X_2\geq k\})$.

$$p(T_1=2) = \sum_{k=1}^{3} p(X_1=k)\,p(X_2\geq k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} p(X_2\geq k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left(1-p(X_2\leq k-1)\right)$$

$$p(T_1=2) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left(1-\frac{k-1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{4}{3}-\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(4-\frac{1}{3}\,\frac{3\times 4}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

$\rightarrow p(T_1=3) = p(\{X_2 < X_1\} \cap \{X_2 \leq X_3\}) = \sum_{k=1}^{3} p(\{X_2=k\} \cap \{X_1>k\} \cap \{k \leq X_3\})$

$p(T_1=3) = \sum_{k=1}^{3} p(X_2=k)p(X_1>k)p(X_3 \geq k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3} \times \frac{3-k}{3} \times \frac{3-(k-1)}{3}$

$$p(T_1=3) = \frac{1}{27}\sum_{k=1}^{3}(3-k)(4-k) \underset{i=3-k}{=} \left(\sum_{i=0}^{2} i(i+1)\right) \times \frac{1}{27} = \frac{1}{27}(1\times 2+2\times 3) = \frac{8}{27}.$$

$\rightarrow p(T_1=4) = 1-p(T_1=2)-p(T_1=3) = 1-\frac{2}{3}-\frac{8}{27} = \frac{1}{27}(27-18-8) = \frac{1}{27}.$

$T_1(\Omega) = [\![2,4]\!]$. $p(T_1=2) = \frac{2}{3}$, $p(T_1=3) = \frac{8}{27}$, $p(T_1=4) = \frac{1}{27}$.

$T_2(\Omega) = [\![2,4]\!]$.

$\rightarrow p(T_2=2) = p(X_1+X_2>3) = \sum_{k=1}^{3} p(\{X_1=k\} \cap \{X_2 > 3-k\}) = \sum_{k=1}^{3} p(X_1=k)\,p(X_2>3-k).$

$p(T_2=2) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3} \times \frac{3-(3-k)}{3} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{3} k = \frac{1}{9}\left(\frac{3\times 4}{2}\right) = \frac{2}{3}$. $p(T_2=2) = \frac{2}{3}$.

$\rightarrow p(T_2=4) = p(\{X_1+X_2+X_3 \leq 3\} \cap \{X_1+X_2+X_3+X_4 \geq 4\})$.

$p(T_2=4) = p(\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\} \cap \{X_3=1\} \cap \{X_4+3 \geq 4\})$.

$p(T_2=4) = p(X_1=1)p(X_2=1)p(X_3=1)p(X_4 \geq 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{27}.$

$\rightarrow$ Alors $p(T_2=3) = 1-p(T_2=2)-p(T_2=4) = 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{27} = \frac{1}{27}(27-18-1) = \frac{8}{27}.$

$T_2(\Omega) = [\![2,4]\!]$; $p(T_2=2) = \frac{2}{3}$, $p(T_2=3) = \frac{8}{27}$, $p(T_2=4) = \frac{1}{27}$.

<u>T_1 et T_2 ont même loi.</u>

<u>b)</u> $E(T_1) = E(T_2) = 2\times\frac{2}{3} + 3\times\frac{8}{27} + 4\times\frac{1}{27} = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37.$

$E(T_1^2) = 4\times\frac{2}{3} + 9\times\frac{8}{27} + 16\times\frac{1}{27} = \frac{160}{27}$; $V(T_1) = \frac{160}{27} - \left(\frac{64}{27}\right)^2 = \frac{224}{729} \simeq 0{,}31.$

$E(T_1) = E(T_2) = \frac{64}{27}$ et $V(T_1) = V(T_2) = \frac{224}{729}$.

Etude de la loi de T_1.

1.. $T_1(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$. Il faut au minimum interroger deux personnes et au maximum $N+1$; ce dernier cas résultant de la réalisation de l'événement le plus défavorable : $\{X_1 > X_2 > \cdots > X_N\}$; si cet événement est réalisé nécessairement $\{X_{N+1} \geq X_N\}$ car X_N a pris la valeur 1.

2.. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(\{T_1 > 0\}) = 1 = \dfrac{C_N^0}{N^0}$ et $P(\{T_1 > 1\}) = 1 = \dfrac{C_N^1}{N^1}$.

Alors $P(T_1 > n) = \dfrac{C_N^n}{N^n}$ pour $n \in \{0, 1\}$!

$\forall n \in [\![N+1, +\infty[\![$, $P(T_1 > n) = 0 = \dfrac{C_N^n}{N^n}$ ... par convention !

Soit $n \in [\![2, N]\!]$.

$P(T_1 > n) = P(X_1 > X_2 > \cdots > X_n)$.

$\{X_1 > X_2 > \cdots > X_n\}$ se réalise si et seulement si les n premiers résultats donnent une suite strictement décroissante. Le nombre de suites strictement décroissantes de n éléments de $[\![1, N]\!]$ est C_N^n (pour construire une telle suite on choisit n éléments de $[\![1, N]\!]$ deux à deux distincts et on les ordonne dans l'ordre décroissant).

Ainsi $P(T_1 > n) = P(X_1 > X_2 > \cdots > X_n) = \dfrac{C_N^n}{N^n}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T_1 > n) = \dfrac{C_N^n}{N^n}$.

$\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $P(T_1 = n) = P(T_1 > n-1) - P(T_1 > n) = \dfrac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \dfrac{C_N^n}{N^n}$.

$$\forall n \in [\![2, N+1]\!],\quad P(T_1 = n) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}.$$

3. $$E(T_1) = \sum_{n=2}^{N+1} n\left(\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}\right) = \sum_{n=2}^{N+1} n\,\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \sum_{n=2}^{N+1} n\,\frac{C_N^n}{N^n}.$$

$$E(T_1) = \sum_{n=1}^{N}(n+1)\frac{C_N^n}{N^n} - \sum_{n=2}^{N+1 \text{ ou } N} n\,\frac{C_N^n}{N^n} = 2\,\frac{C_N^1}{N} + \sum_{n=2}^{N}\frac{C_N^n}{N^n} = 1+1+\sum_{n=2}^{N}\frac{C_N^n}{N^n}.$$

$$E(T_1) = \sum_{n=0}^{N}\frac{C_N^n}{N^n} = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N. \quad E(T_1) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^N.$$

$\underline{\underline{E(T_1) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N.}}$ Pour $N=3$ on retrouve $\frac{64}{27}$ et c'est heureux.

4. $$E(T_1^2 - T_1) = \sum_{n=2}^{N+1}(n^2-n)\times\left(\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}\right)$$

$$E(T_1^2 - T_1) = \sum_{n=2}^{N+1} n(n-1)\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \sum_{n=2}^{N+1 \text{ ou } N} n(n-1)\frac{C_N^n}{N^n}. \qquad \underline{n C_N^n = N C_{N-1}^{n-1}}$$

$n \to n+1$

$$E(T_1^2 - T_1) = \sum_{n=1}^{N}(n+1)n\,\frac{C_N^n}{N^n} - \sum_{n=2 \text{ ou } 1}^{N} n(n-1)\frac{C_N^n}{N^n} = 2\sum_{n=1}^{N} n\,\frac{C_N^n}{N^n} = 2N\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{N-1}^{n-1}}{N^n}$$

$$E(T_1^2 - T_1) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{N-1}^{n-1}}{N^{n-1}} = 2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{C_{N-1}^{n}}{N^n} = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}.$$

$\underline{\underline{E(T_1^2 - T_1) = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}.}}$

$$V(T_1) = E(T_1^2 - T_1) + E(T_1) - (E(T_1))^2 = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{2N}$$

$$V(T_1) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}\left(3+\frac{1}{N} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{2N}.$$

5. $$N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\times\frac{1}{N} = 1. \quad \lim_{N\to+\infty}\left(N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\right) = 1, \quad \lim_{N\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1.$$

Alors $\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = e$. $\underline{\underline{\lim_{N\to+\infty} E(T_1) = e.}}$

$V(T_1) = 2\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{N}}\,E(T_1) + E(T_1) - (E(T_1))^2$; $\lim\limits_{N\to+\infty} V(T_1) = 2e + e - e^2$.

$$\lim_{N\to+\infty} V(T_1) = 3e - e^2 = e(3-e).$$

Etude de la loi de T_2.

1.. Fixons d'abord n dans $\mathbb{N}$. Montrons par récurrence que : $\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$

. $\sum\limits_{k=n}^{n} C_k^n = C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$; la propriété est vraie pour $r=n$.

. Supposons la propriété vraie pour r dans $[\![n,+\infty[\![$ et montrons la pour $r+1$.

$\sum\limits_{k=n}^{r+1} C_k^n = \sum\limits_{k=n}^{r} C_k^n + C_{r+1}^n \overset{HR}{=} C_{r+1}^{n+1} + C_{r+1}^n = C_{r+2}^{n+1}$; ceci achève la récurrence.

$\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$. Or avec la convention proposée : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k^n = 0$

Ainsi $\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$.

Avec la convention proposée pour r dans $[\![0,n-1]\!]$ on a : $\sum\limits_{k=0}^{r} C_k^n = 0 = C_{r+1}^{n+1}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$.

2.- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur minimum que prend $X_1+X_2+\dots+X_n$ est n et la valeur maximum est nN.

Notons que $n > N$ équivaut à $n \geq N+1$ et que $nN > N$ équivaut à $n \geq 2$.

Ainsi T_2 prend ses valeurs dans $[\![2, N+1]\!]$.

3.. Notons par récurrence que, pour tout n dans $[\![1,N]\!]$,

$$\forall j \in [\![1,N]\!],\quad p(X_1+\dots+X_n \leq j) = \frac{C_j^n}{N^n}.$$

• $\forall j \in [\![1,N]\!]$, $p(X_1 \leq j) = \sum_{\ell=1}^{j} p(X_1=\ell) = \sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{N} = \frac{j}{N} = \frac{C_j^1}{N^1}$.

La propriété est donc vraie pour $n=1$.

• Supposons la propriété vraie pour n élément de $[\![1,N-1]\!]$ et montrons-la pour $n+1$. Soit j un élément de $[\![\underline{2},N]\!]$.

$p(X_1+\dots+X_{n+1} \leq j) = \sum_{\ell=1}^{N} p(\{X_{n+1}=\ell\} \cap \{X_1+\dots+X_n \leq j-\ell\})$ car

$(\{X_{n+1}=\ell\})_{\ell \in [\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements.

$X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes donc X_{n+1} et $X_1+\dots+X_n$ le sont également.

Alors $p(X_1+\dots+X_{n+1} \leq j) = \sum_{\ell=1}^{N} p(X_{n+1}=\ell)\, p(X_1+\dots+X_n \leq j-\ell) = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N} p(X_1+\dots+X_n \leq j-\ell)$

$$\forall \ell \in [\![1,N]\!],\quad p(X_1+\dots+X_n \leq j-\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } j-\ell<1 \ (\text{i.e. } j-1<\ell) \\ \dfrac{C_{j-\ell}^n}{N^n} & \text{si } j-\ell \geq 1 \quad (\text{H.R.}) \quad (j-\ell \leq N\dots) \end{cases}$$

Alors $p(X_1+\dots+X_{n+1} \leq j) = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{C_{j-\ell}^n}{N^n} = \frac{1}{N^{n+1}}\sum_{\ell=1}^{j-1} C_\ell^n = \frac{1}{N^{n+1}}\sum_{\underline{\ell=0}}^{j-1} C_\ell^n$

Le résultat de 1. donne alors $p(X_1+\dots+X_{n+1} \leq j) = \frac{1}{N^{n+1}} C_{j-1+1}^{n+1} = \frac{C_j^{n+1}}{N^{n+1}}$ et

ainsi s'achève la récurrence car ce dernier résultat vaut encore pour $j=1$ $(0=0\,!)$.

$$\underline{\underline{\forall n \in [\![1,N]\!],\ \forall j \in [\![1,N]\!],\quad p(X_1+X_2+\dots+X_n \leq j) = \frac{C_j^n}{N^n}}}.$$

⚠ Notons que ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

car si $n \in [\![N+1,+\infty[\![$, $\forall j \in [\![1,N]\!]$, $p(X_1+\dots+X_n \leq j) = 0 = \frac{0}{N^n} = C_j^n / N^n$.

4.. Soit $n \in [\![2,N+1]\!]$

$p(T_2=n) = p(\{X_1+\dots+X_{n-1} \leq N\} \cap \{X_1+\dots+X_n > N\})$

Notons que $\{X_1+\cdots+X_n > N\} = \{X_1+\cdots+X_{n-1} > N\} \cup \left(\{X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N\} \cap \{X_1+\cdots+X_n > N\}\right)$.
L'union étant disjointe il vient :

$$p(X_1+\cdots+X_n > N) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} > N) + p(\{X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N\} \cap \{X_1+\cdots+X_n > N\}).$$

Alors $p(X_1+\cdots+X_n > N) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} > N) + p(T_2 = n)$.

$$p(T_2=n) = p(X_1+\cdots+X_n>N) - p(X_1+\cdots+X_{n-1}>N) = 1-p(X_1+\cdots+X_n \leq N) - 1 + p(X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N).$$

$$p(T_2=n) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N) - p(X_1+\cdots+X_n \leq N) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}.$$

Finalement :

$$\forall n \in [\![2, N+1]\!],\quad p(T_2 = n) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}.$$

5.. T_1 et T_2 ont même loi.

Partie 2

1.. Soyons un peu plus rigoureux que le texte. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Y_1+\cdots+Y_n$ est une variable aléatoire à densité qui admet une densité f_n vérifiant :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ f_n(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}-[0,1] \\ 1 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$.

f_1 est une densité de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- En particulier f_1 est une densité de $S_1 = Y_1$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et telle que $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) = \dfrac{x^{1-1}}{(1-1)!}$. La propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit f_n une densité de $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ telle que : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes ainsi S_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

Alors S_n et Y_{n+1} sont deux variables aléatoires à densité admettant pour densité f_n et f_1. Alors le cours nous permet de dire que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_n(x-t)\,dt$

$\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 f_n(x-t)\,dt$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$. $\forall t \in [0,1]$, $x - t \in]-\infty, 0[$; $h(x) = \int_0^1 0\,dt = 0$.

h est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Soit $x \in [0,1]$. $h(x) = \int_0^1 f_n(x-t)\,dt \underset{u = x-t}{=} \int_x^{x-1} f_n(u)(-du) = \int_{x-1}^x f_n(u)\,du \underset{x-1 \leq 0}{=} \int_0^x f_n(u)\,du$.

$$h(x) = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \left[\frac{u^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}.$$

Posons alors $f_{n+1} = h$; f_{n+1} est une densité de S_{n+1} nulle sur $]-\infty, 0[$ et telle que

$\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!}$. Ceci achève la récurrence.

<u>Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité f_n</u>

<u>admettant une densité f_n qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.</u>

2.- Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y. $X = 1 + (N-1)Y$ donc $Y = \frac{1}{N-1}(X-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - 1 \leq x(N-1)) = P(X \leq (N-1)x + 1) = F_X((N-1)x+1)$

<u>1er cas.</u> $x \in]-\infty, 0[$; $(N-1)x + 1 < 1$; $F_Y(x) = F_X((N-1)x+1) = 0$.

2ème cas.. $x \in [0,1]$. $(N-1)x+1 \in [1,N]$. $F_Y(x) = \dfrac{((N-1)x+1)-1}{N-1} = x$.

3e cas.. $x \in]1,+\infty[$ $(N-1)x+1 \in]N,+\infty[$. $F_Y(x) = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [1,N] \\ 1 & \text{si } x \in]N,+\infty[\end{cases}$$

. Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

3.. Ici encore $T_2(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$ car pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i prend ses valeurs dans $[1,N]$... encore que pour $N+1$... mais attendons.

$\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = p(X_1+\dots+X_n > N) - p(X_1+\dots+X_{n-1} > N)$.

Posons pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $Y_i = \dfrac{X_i - 1}{N-1}$. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i = 1 + (N-1)Y_i$.

Alors pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. De plus $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

D'après 1., pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $S_i = Y_1+\dots+Y_i$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité f_i qui vérifie $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_i(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_i(x) = \dfrac{x^{i-1}}{(i-1)!}$.

Notons aussi que : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $S_i = Y_1+\dots+Y_i = \dfrac{X_1-1}{N-1}+\dots+\dfrac{X_i-1}{N-1} = \dfrac{1}{N-1}[X_1+\dots+X_i - i]$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_1+X_2+\dots+X_i = (N-1)S_i + i$

Alors $\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = p(X_1+\dots+X_n > N) - p(X_1+\dots+X_{n-1} > N) =$

$p((N-1)S_n + n > N) - p((N-1)S_{n-1} + n-1 > N) = p\left(S_n > \dfrac{N-n}{N-1}\right) - p\left(S_{n-1} > \dfrac{N-n+1}{N-1}\right)$.

$\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = 1 - p\left(S_n \leqslant \dfrac{N-n}{N-1}\right) - 1 + p\left(S_{n-1} \leqslant \dfrac{N-n+1}{N-1}\right) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt$

$\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_n(t)\,dt$.

Notons que $\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $\dfrac{N-n+1}{N-1} \in [0,1]$ et $\forall n \in [\![2, N]\!]$, $\dfrac{N-n}{N-1} \in [0,1]$

Si $n = N+1$: $\dfrac{N-n}{N-1} < 0$.

Alors $\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt = \int_0^{\frac{N-n+1}{N-1}} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\left[t^n\right]_0^{\frac{N-n+1}{N-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{N-n+1}{N-1}\right)^{n-1}$

$\forall n \in [\![2, N]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{N-n}{N-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{n!}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^n.$

Si $n = N+1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall n \in [\![2, N]\!]$, $\displaystyle p(T_2 = n) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{N-n+1}{N-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{n!}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^n$

$p(T_2 = N+1) = 0$ (Normal ! $p(T_2 = N) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \dots \cap X_N = 1) = \dots = 0$)