

ECRICOPE 2003

Ce problème ne nécessite aucune connaissance en estimation.

Par contre il utilise la réduction des matrices symétriques.

3. PROBLEME.

On rappelle que :

- La fonction Γ est la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$$

- Si X suit une loi normale et si α est un réel non nul alors αX suit également une loi normale.

On admettra que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3.1.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$, où X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$.
2. En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.



3. Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $(2, \frac{n}{2})$.
4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n .
5. On dit alors que Y_n suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$.
Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0, 1[$.
Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi_{\beta}^2(n)$

Dans la suite du problème on considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (3.2) puis une estimation par intervalle de confiance (3.3 et 3.4) de la variance σ^2 .

Si g est une fonction de n variables réelles, et que $Z_n = g(X_1, \dots, X_n)$, on rappelle que :

- g est un estimateur de θ (Z_n est un estimateur de θ) lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit sans biais lorsque pour tout n entier naturel non nul :

$$E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit convergent lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Z_n) = 0$$

3.2. Estimation ponctuelle de σ^2 .

Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2$$

1. Montrer que $(F_n)_{n \geq 1}$ est un estimateur convergent sans biais de m .
2. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

puis que :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

b. Prouver que :

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

c. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 .

3.3. Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant connue.

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \text{ et } T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

1. Justifier que U_n suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté.
2. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right] \text{ et } \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right]$$

En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$ est $1 - \alpha$.

3.4. Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant inconnue.

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de \mathbb{R}^n .

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

1. Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique est A définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } \begin{cases} a_{ii} = n - 1 \\ a_{ij} = -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et B la matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

- Justifier que A est une matrice diagonalisable.
- Calculer le produit AB , en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.
- Montrer que :

$$\dim \text{Im}(\varphi - n\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

- En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi - n\text{Id}_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .

- Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à

la valeur propre n . Prouver que : $\sum_{i=1}^n w_i = 0$.

- Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que :

$$P^{-1}AP = D \text{ avec } {}^tP = P^{-1}$$

(On ne demande pas la matrice P).

- On note $(p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ les coefficients de la matrice tP , montrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$$

puis que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1$$

2. Soit q l'application de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = {}^t X M X \text{ où } M = \frac{1}{n} A$$

a. On pose $Y = {}^t P X$, montrer que :

$$q(X) = \frac{1}{n} Y D Y$$

puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n} Y D Y$, montrer que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$$

3. Pour tout i de l'ensemble $\{1, \dots, n-1\}$ on pose :

$$Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j$$

- a. Justifier que Y_i suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.
 b. En utilisant les résultats de la question 3.4.2, montrer que :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$$

- c. En admettant que les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du *Chi - deux* à $n-1$ degrés de liberté.
 d. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right] \text{ et } \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right]$$

sont égaux.

e. En déduire que la probabilité de l'événement :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$$

est $1 - \alpha$.

PROBLÈME

3.1 Loi du chi-deux

$$\boxed{1} \text{ Posons : } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ et } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

φ est une densité de X_1 et Φ est sa fonction de répartition. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq x).$$

Alors : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Y_1}(x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - 1.}$$

$$\boxed{2} \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi' = \varphi.$$

Notons que $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_1} = 0$ ($\Phi(0) = \frac{1}{2}$). Alors F_{Y_1} est de classe \mathcal{C}^1 SUR $] - \infty, 0[$.

$x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc F_{Y_1} est continue SUR $[0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 SUR $]0, +\infty[$.

F_{Y_1} étant continue sur $] - \infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, F_{Y_1} est continue sur \mathbb{R} .

F_{Y_1} étant de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, F_{Y_1} est au moins de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

F_{Y_1} est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points donc Y_1 est une variable aléatoire à densité.

$$\text{De plus } \forall x \in]-\infty, 0[, F'_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, F'_{Y_1}(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}.$$

$$\text{Posons : } \forall x \in]-\infty, 0[, f_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f_{Y_1}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}.$$

f_{Y_1} est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ qui coïncide avec F'_{Y_1} sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points donc f_{Y_1} est une densité de Y_1 .

f_{Y_1} est également une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$. Finalement :

$$\boxed{Y_1 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{1}{2}.}$$

$\boxed{3}$ Notons que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes et suivent toutes une loi normale centrée réduite. Ainsi les variables aléatoires $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ sont indépendantes et suivent toutes une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Le cours indique que la somme de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gamma de paramètres respectifs b, τ et b, τ' suit une loi gamma de paramètres $b, \tau + \tau'$.

Une récurrence simple permet alors de dire que $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $n \times \frac{1}{2}$.

$$\boxed{Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{n}{2}.}$$

$\boxed{4}$ Comme $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n}{2}$ le programme nous permet de dire que $E(Y_n) = 2 \times \frac{n}{2} = n$.

Le programme n'exige pas la connaissance de la variance d'une loi gamma. Retrouvons cette variance.

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres b et τ .

Posons $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\psi_1(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\psi_1(x) = \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{\tau-1}}{b^\tau \Gamma(\tau)}$. ψ_1 est une densité de Z .

Posons encore : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\psi_2(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\psi_2(x) = \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}$. ψ_2 est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres b et $\tau+2$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, x^2 \psi_1(x) = \frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)} = \frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} \psi_2(x).$$

Notons que $\Gamma(\tau+2) = (\tau+1) \tau \Gamma(\tau)$. Alors $\frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} = b^2 (\tau+1) \tau$.

Par conséquent $\forall x \in]0, +\infty[$, $x^2 \psi_1(x) = b^2 (\tau+1) \tau \psi_2(x)$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \psi_1(x) = b^2 (\tau+1) \tau \psi_2(x)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(t) dt$ existe et vaut 1 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \psi_1(t) dt$ existe et vaut $b^2 (\tau+1) \tau$. Alors $E(Z^2)$ existe et vaut $b^2 (\tau+1) \tau$.

Par conséquent Z possède une variance qui vaut $b^2 (\tau+1) \tau - (E(Z))^2 = b^2 (\tau+1) \tau - (b\tau)^2 = b^2 \tau$.

$V(Z)$ existe et vaut $b^2 \tau$. Appliqué à Y_n ce résultat permet de dire que :

Y_n possède une variance qui vaut $2n$

5 Posons : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_{Y_n}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{Y_n}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$.

f_{Y_n} est une densité de Y_n nulle sur $] -\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent la fonction de répartition G_n de Y_n est nulle sur $] -\infty, 0]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $G'_n(x) = f_{Y_n}(x) > 0$.

Tout d'abord il n'existe pas de réel t appartenant à l'intervalle $] -\infty, 0]$ tel que $G_n(t) = \beta$ ($\beta > 0$).

De plus G_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. La restriction de G_n à $]0, +\infty[$ définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $G_n(]0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow 0^+} G_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x)[$.

G_n étant une fonction de répartition G_n est en particulier continue en 0, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} G_n(x) = G_n(0) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = 1$.

La restriction de G_n à $]0, +\infty[$ définit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Comme β appartient à $]0, 1[$, il existe un unique élément t de $]0, +\infty[$ tel que $G_n(t) = \beta$.

Il existe un unique réel t tel que $G_n(t) = \beta$.

3.2 Estimation ponctuelle de σ^2 .

1 Pour tout i dans $[[1, n]]$, X_i possède une espérance qui vaut m . Alors $F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$ donc $\frac{1}{n} (n \times m)$ ou m (linéarité de l'espérance).

X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes possédant une variance qui vaut σ^2 donc $\sum_{i=1}^n X_i$ possède une variance qui vaut $n \sigma^2$.

Alors $F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ possède une variance qui vaut $\left(\frac{1}{n}\right)^2 n \sigma^2$ ou $\frac{\sigma^2}{n}$.

$E(F_n) = m$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(F_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$. Par conséquent :

F_n est un estimateur sans biais et convergent de m .

$$\boxed{2} \text{ a) } \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i F_n + F_n^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) F_n + \sum_{i=1}^n F_n^2.$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2(n F_n) F_n + n F_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n F_n^2.$$

En multipliant par $\frac{1}{n}$ il vient : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2$. Finalement :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((X_i^2 - 2m X_i + m^2) + 2m X_i - m^2 \right) - F_n^2.$$

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2m F_n - m^2 - F_n^2$$

Ceci donne alors sans difficulté :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2.$$

b) Soit i un élément de $[[1, n]]$. X_i possède une espérance qui vaut m et une variance qui vaut σ^2 .

Donc $E((X_i - E(X_i))^2)$ existe et vaut σ^2 . Ainsi $(X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut σ^2 .

Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - m)^2)$ ou $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2$ soit encore σ^2 .

De plus nous avons vu, dans 3.2.1 que F_n possède une espérance et une variance, que $E(F_n) = m$ et que $V(F_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Alors $(F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{\sigma^2}{n}$.

Finalement $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut : $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2\right) - E((F_n - m)^2)$

ou $\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$.

$$V_n \text{ possède une espérance et } E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

c) Supposons $n \geq 2$. $E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ donc $\frac{n}{n-1} E(V_n) = \sigma^2$. Ainsi $E\left(\frac{n}{n-1} V_n\right) = \sigma^2$. Finalement :

$$\frac{n}{n-1} V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.$$

3.3 Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant connue.

Il semble raisonnable de supposer dans la suite que α est un réel appartenant à $]0, 1[$

1 Soit i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$.

X_i suit une loi normale de paramètres m et σ et $Z_i = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{V(X_i)}}$ donc Z_i suit une loi normale centrée réduite.

X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes donc Z_1, Z_2, \dots, Z_n le sont également.

3.1.3 permet alors de dire que $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté.

Or $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = U_n$. Finalement :

U_n suit une loi du *Chi - deux* à n degré de liberté.

2 $nT_n = \sigma^2 U_n$ donc $\left\{ \frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \frac{U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq 1 \leq \frac{U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\}$.

3.1.5 nous a montré que que $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ et $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$\left\{ \frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right\}$.

U_n suit une loi du *Chi - deux* à n degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc G_n .

Alors $P\left(\left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right\}\right) = G_n\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) - G_n\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$.

La probabilité de l'événement $\left\{ \frac{nT_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\}$ est $1 - \alpha$.

3.4 Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant inconnue.

Nous supposons dans toute cette partie que n est supérieur ou égal à 2.

1 a) A est une matrice symétrique et réelle donc A est diagonalisable.

b) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $C = AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i = 1$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} = n - 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1) = n - 1 + (n - 1) \times (-1) = 0$.

$AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

B n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ par conséquent :

0 est une valeur propre de A et B est un vecteur propre associé.

c) La matrice de $\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n est $A - n I_n$.

Il est aisé de voir que $A - n I_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1 .

Cette matrice n'est pas la matrice nulle et toutes ses colonnes sont identiques, elle est donc de rang 1.

Ainsi $\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}$ est de rang 1.

$\dim \text{Im}(\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}) = 1$.

d) Le théorème du rang donne $\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) + \dim \text{Im}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Ainsi $n = \dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) + 1$. Par conséquent :

$$\dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1.$$

Comme $n \geq 2$, $\dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1 \geq 1$. Alors $\text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ n'est pas réduit au vecteur nul et ainsi n est une valeur propre de φ dont le sous-espace propre est de dimension $n - 1$.

n est donc une valeur propre de A dont le sous-espace propre $\text{SEP}(A, n)$ est de dimension $n - 1$.

Rappelons que 0 est une valeur propre de A et que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc la somme des dimensions de ces sous espaces propres est n . Ainsi 0 et n sont les seules valeurs propres de A et le sous-espace propre $\text{SEP}(A, 0)$ associé à la valeur propre 0 est de dimension 1. Mieux $\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}(B)$.

A étant symétrique $\text{SEP}(A, 0)$ et $\text{SEP}(A, n)$ sont orthogonaux. Ces deux sous-espaces étant supplémentaires :

$$\text{SEP}(A, n) = (\text{SEP}(A, 0))^\perp = (\text{Vect}(B))^\perp$$

L'ensemble des valeurs propres de A est $\{0, n\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle engendrée par B et celui associé à la valeur propre n est $(\text{Vect}(B))^\perp$.

e) Nous supposons que W est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n ...

Version 2 W est orthogonal à B donc $\langle W, B \rangle = 0$. Ainsi $\sum_{j=1}^n (w_j \times 1) = 0$ donc $\sum_{j=1}^n w_j = 0$!

Version 2 $AW = nW$. Alors : $n w_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} w_j = a_{11} w_1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j} w_j = (n - 1) w_1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n (-w_j) = n w_1 - \sum_{j=1}^n w_j$.

$n w_1 = n w_1 - \sum_{j=1}^n w_j$ donc $\sum_{j=1}^n w_j = 0$. Ainsi :

Si $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n alors $\sum_{i=1}^n w_i = 0$.

Remarque $\text{SEP}(A, n)$ est en fait l'ensemble des éléments $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que : $\sum_{i=1}^n u_i = 0$.

f) Soit $(W_1, W_2, \dots, W_{n-1})$ une base orthonormale du sous-espace propre $\text{SEP}(A, n)$ de A associé à la valeur propre n . Soit (W_n) une base orthonormale du sous-espace propre $\text{SEP}(A, 0)$ de A associé à la valeur propre 0.

$\text{SEP}(A, n)$ et $\text{SEP}(A, 0)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{B} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $n, n, \dots, n, 0$.

Notons P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à \mathcal{B} .

P est inversible et $P^{-1} = {}^t P$ car \mathcal{B}_0 et \mathcal{B} sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De plus $D = P^{-1} A P$ est la matrice diagonale dont les $n - 1$ premiers coefficients de la diagonale valent n et le dernier 0. $D = \text{Diag}(n, n, \dots, n, 0)$...

Notons que la dernière colonne de P est W_n et que W_n est un élément de $\text{SEP}(A, 0)$ qui est la droite vectorielle engendrée par B . Ainsi la dernière colonne de P est proportionnelle à B .

Il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est proportionnelle à B et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = D$ avec ${}^tP = P^{-1}$. $D = \text{Diag}(n, n, \dots, n, 0)$.

g) On est prié de remarquer que ${}^tP = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La $i^{\text{ème}}$ colonne de P est W_i et W_i appartient à $\text{SEP}(A, n)$. e) montre alors que la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de P est nulle.

Ainsi la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de tP est nulle. $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0.$$

Posons $P = (q_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et ${}^tPP = (s_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. ${}^tPP = I_n$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 = s_{ii} = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_{ji} = \sum_{j=1}^n p_{ij} p_{ij} = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1.$$

2) a) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = {}^tPX$ et observons que $A = PD{}^tP$.

$$q(X) = {}^tXMX = \frac{1}{n} {}^tXAX = \frac{1}{n} {}^tXPD{}^tPX = \frac{1}{n} {}^t({}^tPX)D{}^tPX = \frac{1}{n} {}^tYDY.$$

Si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si $Y = {}^tPX$ alors $q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ pour simplifier les écritures.

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tXAX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \left((n-1)x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \left(nx_i - \sum_{j=1}^n x_j \right) \right)$$

$$q(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (nx_i - ns) = \sum_{i=1}^n x_i (x_i - s) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - s \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + s \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$q(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + ns^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2sx_i + s^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - s)^2. \text{ Ainsi :}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tPX$. $q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$.

$$DY = \begin{pmatrix} n y_1 \\ n y_2 \\ \vdots \\ n y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } q(X) = \frac{1}{n} {}^t Y D Y = \frac{1}{n} (n y_1^2 + n y_2^2 + \dots + n y_{n-1}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j$ donc $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$.

3 a) Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Posons $J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid p_{ij} \neq 0\}$.

J n'est pas vide car la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^t P$ n'est pas nulle puisque ${}^t P$ est inversible. $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j = \sum_{j \in J} p_{ij} X_j$.

X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes donc $(X_j)_{j \in J}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

$(p_{ij} X_j)_{j \in J}$ est alors également une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

De plus pour tout j dans J , $p_{ij} X_j$ suit une loi normale car X_j suit une loi normale et p_{ij} est un réel non nul.

Le cours montre alors que $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j = \sum_{j \in J} p_{ij} X_j$ suit une loi normale.

$$E(Y_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} E(X_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij} m = m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0.$$

Rappelons que X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes donc il en est de même pour $p_{i1} X_1, p_{i2} X_2, \dots, p_{in} X_n$.

Alors $V(Y_i) = \sum_{j=1}^n V(p_{ij} X_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 V(X_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$. Ainsi :

Pour tout élément i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, Y_i suit une loi normale de paramètres 0 et σ .

b) 3.4.2 montre que : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2$. Ainsi :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} X_j \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

c) Posons $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $H_i = \frac{1}{\sigma} Y_i$.

Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Y_i suit une loi normale et $\frac{1}{\sigma}$ est un réel non nul donc H_i suit une loi normale.

$E(H_i) = \frac{1}{\sigma} E(Y_i) = 0$ et $V(H_i) = \frac{1}{\sigma^2} V(Y_i) = 1$. Ainsi H_i suit une loi normale centrée réduite.

Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1} sont mutuellement indépendantes donc H_1, H_2, \dots, H_{n-1} sont mutuellement indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite.

Alors, d'après 3.1.2, $\sum_{i=1}^{n-1} H_i^2$ suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté.

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{n-1} H_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = U_n.$$

U_n suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté.

d) $(n - 1) S_n = \sigma^2 U_n$, donc :

$$\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \frac{U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq 1 \leq \frac{U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\}.$$

3.1.5 nous a montré que que $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ et $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$$\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right\}.$$

e) U_n suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc G_{n-1} .

$$\text{Donc } P \left(\left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right\} \right) = G_{n-1} \left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right) - G_{n-1} \left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$

La probabilité de l'événement $\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\}$ est $1 - \alpha$.

Remarque Ce problème donne l'occasion de revisiter *HEC 99 math 2*.
