ECRICOME 2005

3. PROBLEME.

X et Y étant deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives f_X et f_Y, on rappelle que la fonction h définie par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\, dt$$

est une densité de la variable aléatoire $X+Y$.

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\, dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$

En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :

$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$$

3. Calculer J_1.
Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
   Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$. (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$).

2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f_n. (On dira que X suit une loi de Student à n degrés de liberté).

   a. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

   b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que

$$V(X) = \frac{n}{n-2}$$

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle **loi de Cauchy** *et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :*

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Partie III : Simulation d'une loi.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que Θ, mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan \Theta$. En déduire que $\tan \Theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

Tournez la page SVP

2. Exprimer Y, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M, en fonction de Θ. Reconnaître la loi de Y.

3. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On considère le programme informatique suivant :

```
program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=random;
x:=sin/cos(pi*u-pi/2);
end.
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

   a. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f et montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.
   On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.

   b. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g, et que Y et $-Y$ ont la même loi.
   Montrer que, pour tout réel x, $P([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$
   Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x. (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
   En déduire que Y est une variable à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g.

2. Soit c un réel strictement positif. A l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}} \, dt$$

converge et la calculer.

3. Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   a. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

   b. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln |\frac{X}{X'}|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

   c. Déterminer une densité de la variable aléatoire $|\frac{X}{X'}|$ puis reconnaitre la loi de $\frac{X}{X'}$.

PROBLÈME

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Soit α un réel. $\widehat{f}_\alpha : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

Notons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ converge et que $\widehat{f}_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2\alpha}}$.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha}}$.

Cette dernière intégrale converge si et seulement si $2\alpha > 1$ ou $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha, \text{ l'intégrale } J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

2. Soit α un réel de l'intervalle $[1,+\infty[$ (ou de l'intervalle $]\frac{1}{2},+\infty[$). $h_\alpha : t \to \dfrac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Fixons A dans $[0,+\infty[$ et posons $\forall t \in [0,+\infty[,\ u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De plus : $\forall t \in [0,+\infty[,\ u'(t) = 1$, $\forall t \in [0,+\infty[,\ v'(t) = -\dfrac{1}{2\alpha}\left(-\dfrac{\alpha\,(2t)\,(1+t^2)^{\alpha-1}}{(1+t^2)^{2\alpha}}\right) = \dfrac{t}{(1+t^2)^{\alpha+1}}$.

Notons que $h_\alpha = u\,v'$. Une intégration par parties alors claire donne :

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt = \left[t\left(-\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{(1+t^2)^\alpha}\right)\right]_0^A - \int_0^A 1 \times \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)\frac{1}{(1+t^2)^\alpha}\,dt.$$

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt = -\frac{1}{2\alpha}\frac{A}{(1+A^2)^\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} = 0$ car $\dfrac{A}{(1+A^2)^\alpha} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{A^{2\alpha}} = \dfrac{1}{A^{2\alpha-1}}$ et $2\alpha - 1 > 0$.

Nous avons également $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = J_\alpha$. Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1}{2\alpha}J_\alpha$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha \text{ de } [1,+\infty[\text{ (ou de }]\tfrac{1}{2},+\infty[),\ \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{2\alpha}J_\alpha.}$$

Soit α un réel de l'intervalle $[1,+\infty[$ (ou de l'intervalle $]\frac{1}{2},+\infty[$).

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\alpha}} = J_\alpha.$

Ainsi $\displaystyle J_{\alpha+1} = J_\alpha - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = J_\alpha - \frac{1}{2\,\alpha} J_\alpha = \frac{2\,\alpha-1}{2\,\alpha} J_\alpha.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha \text{ de } [1,+\infty[\text{ (ou de }]\tfrac{1}{2},+\infty[),\ J_{\alpha+1} = \frac{2\,\alpha-1}{2\,\alpha} J_\alpha.}$$

3. $\displaystyle J_1 = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \big[\arctan t\big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}\cdot$

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

"$\displaystyle J_n = \frac{2\,(n-1)-1}{2\,(n-1)} \times \frac{2(n-2)-1}{2\,(n-2)} \times \cdots \times \frac{2\times1-1}{2\times1} \times J_1 = \frac{(2\,n-3)(2\,n-5)\cdots(1)}{2^{n-1}\,(n-1)!} J_1$"

"$\displaystyle J_n = \frac{(2\,n-2)(2\,n-3)(2\,n-4)(2\,n-5)\cdots(2)(1)}{2^{n-1}\,(n-1)!\,(2\,(n-1))(2\,(n-2))\cdots(2)} J_1 = \frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} J_1$"

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle J_n = \frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} J_1.$

- La propriété est vraie pour $n=1$ car pour $n=1$, $\displaystyle\frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} = \frac{0!}{[1\times 0!]^2} = 1.$

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$J_{n+1} = \frac{2\,n-1}{2\,n} J_n = \frac{2\,n-1}{2\,n}\,\frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} J_1 = \frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)^2}\,\frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} J_1.$$

$\displaystyle J_{n+1} = \frac{(2\,n)!}{[2\,n\,2^{n-1}\,(n-1)!]^2} J_1 = \frac{(2\,n)!}{[2^n\,n!]^2} J_1$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2} J_1 = \frac{(2n-2)!}{\big[2^{n-1}\,(n-1)!\big]^2}\,\frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrons d'abord l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$. Notons que g_n est continue, paire et (strictement) positive sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ il suffit donc de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}}\,\frac{1}{t^{n+1}}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$ converge car $n+1>1$ et g_n est positive sur $[1,+\infty[$.

Les règles de comparaisons des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

g_n étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\,\mathrm{d}t$ est également strictement positive.

Posons alors $k_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$; k_n est un réel strictement positif. Posons encore $f_n = \dfrac{1}{k_n}\,g_n$.

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est positive sur $\mathbb{R}$ car g_n est positive sur $\mathbb{R}$ et k_n est un réel strictement positif.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Mieux $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\,k_n = 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } n \text{ appartient à } \mathbb{N}^* \text{ et si } k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t,\ f_n = \frac{1}{k_n}\,g_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $k_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$\varphi : t \to \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante. Elle définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

Ceci suffit pour s'autoriser à faire le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient alors :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left((1+u^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sqrt{n}\right)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n = 2\sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}.}$$

2. a. et b. Gagnons un peu de temps en fixant r dans $\mathbb{N}^*$ et en étudiant l'existence d'un moment d'ordre r pour X.

Il s'agit donc d'étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\,f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\,f_n(t)\,\mathrm{d}t$ car f_n a la parité de r sur $\mathbb{R}$.

Observons que $t \to t^r\,f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Notons encore que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\,f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\,g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge ou si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\,g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Retenons alors que X possède un moment d'ordre r si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\,g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et étudions la nature de cette intégrale.

$t \to t^r\,g_n(t)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus :

$$t^r\,g_n(t) = t^r\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^r\left(\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}}\,t^r\,t^{-(n+1)} = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\, g_n(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $n+1-r>1$ ou $n>r$. Finalement :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } r \text{ si et seulement si } n>r.}$$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance si et seulement si } n>1.}$$

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre 2 ou une variance si et seulement si } n>2.}$$

$t \to t\, f_n(t)$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pourvu que l'on ait $n>1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n>1,\ E(X)=0.}$$

Supposons $n>2$. $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2\, f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$$V(X) = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty} t^2\, g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty} t^2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ déjà justifié dans **Q1** donne alors :

$$V(X) = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty}\left(n\,u^2\,\left(1+u^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}\sqrt{n}\right)\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{n}\,n}{k_n}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

En remarquant que $\dfrac{n-1}{2} \geqslant 1$ (car $n\geqslant 3$) et en appliquant **I Q2** on obtient :

$$V(X) = \frac{2\sqrt{n}\,n}{k_n}\,\frac{1}{2\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{2\sqrt{n}\,n}{(n-1)\,k_n}\,J_{\frac{n-1}{2}}.$$

Or $k_n = 2\sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}$ et, d'après **I Q2**, $J_{\frac{n+1}{2}} = J_{\frac{n-1}{2}+1} = \dfrac{2\,\frac{n-1}{2}-1}{2\,\frac{n-1}{2}}\,J_{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n-2}{n-1}\,J_{\frac{n-1}{2}}$ (toujours parce que $\frac{n-1}{2}\geqslant 1$). Alors $k_n = 2\sqrt{n}\,\dfrac{n-2}{n-1}\,J_{\frac{n-1}{2}}$.

Ainsi $V(X) = \dfrac{2\sqrt{n}\,n}{(n-1)\,2\sqrt{n}\,\frac{n-2}{n-1}\,J_{\frac{n-1}{2}}}\,J_{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n}{n-2}$.

$$\boxed{\text{Si } n>2,\ V(X) = \frac{n}{n-2}.}$$

Partie III : Simulation d'une loi.

1. Posons $T=\tan\Theta$ et notons F_T la fonction de répartition de T et F_Θ celle de Θ.

Rappelons que $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right[, F_\Theta(x) = 0$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F_\Theta(x) = \dfrac{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\pi}\left[x+\dfrac{\pi}{2}\right]$

et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, F_\Theta(x) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(\tan\Theta \leqslant x) = P(\Theta \leqslant \arctan x)$ car arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et Θ prend ses valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = F_\Theta(\arctan x) = \dfrac{1}{\pi}\left[\arctan x + \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x + \frac{\pi}{2}\right].}$$

arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $F_T : x \to \dfrac{1}{\pi}\left[\arctan x + \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi F_T est une variable aléatoire à densité et F_T' en est une densité.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T'(t) = \dfrac{1}{\pi\,(1+x^2)}$. Alors $F_T' = f_1$. Finalement :

$$\boxed{T = \tan\Theta \text{ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité } f_1 : x \to \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}.}$$

2. $Y = \tan\Theta = T$! ! Ainsi Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f_1. Par conséquent :

$$\boxed{Y = \tan\Theta \text{ et } Y \text{ suit une loi de Cauchy.}}$$

3. Réecrivons le programme pour commencer.

```
Program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=pi*random-pi/2;
x:=sin(u)/cos(u);
writeln(x);
end.
```

Random fournit un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$. Comme $z \to \pi\, x - \dfrac{\pi}{2}$ définit une bijection de $[0, 1[$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'instruction **u : =pi*random-pi/2** affecte à la variable u un réel choisit au hasard dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On affecte alors à la variable x la tangente de ce nombre et on l'affiche.

Rassurons nous en disant que la probabilité pour que l'on affecte à u la valeur $-\dfrac{\pi}{2}$ est nulle.

Ainsi ce programme simule la variable aléatoire $Y = \tan\Theta$ qui suit une loi de Cauchy.

$$\boxed{\text{Ce programme simule la loi de Cauchy.}}$$

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

1. a. Y est une variable aléatoire à densité de densité f. Le cours, ou presque, nous dit alors que $-Y = (-1)\,Y$ est une variable aléatoire à densité admettant $x \to \dfrac{1}{|-1|}\, f\left(\dfrac{x-0}{-1}\right)$ ou $x \to f(-x)$ pour densité.

$$\boxed{-Y \text{ est une variable aléatoire à densité admettant } x \to f(-x) \text{ pour densité.}}$$

Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

Montrons que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.

• Supposons que Y et $-Y$ ont même loi. Y et $-Y$ ont même fonction de répartition. Notons $\widehat{F}$ celle de $-Y$. Par hypothèse $\widehat{F} = F$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, $x \to f(-x)$ est une densité de $-Y$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{F}'(x) = f(-x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \widehat{F}'(x) = F'(x) = f(x)$. Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

• Supposons que f est paire sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. Ainsi f est une densité de Y et de $-Y$ donc Y et $-Y$ ont même loi.

$$\boxed{Y \text{ et } -Y \text{ ont même loi si et seulement si } f \text{ est paire.}}$$

Dans la suite de ce **a**, f est paire donc Y et $-Y$ ont même loi. Ainsi $\widehat{F} = F$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ G(x) = P(|Y| \leqslant x) = 0.$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = P(|Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant Y \leqslant x) = P(Y \leqslant x) - P(Y < -x).$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = P(Y \leqslant x) - P(-Y > x) = P(Y \leqslant x) - \big(1 - P(-Y \leqslant x)\big) = F(x) - \big(1 - \widehat{F}(x)\big).$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = F(x) - \big(1 - F(x)\big) = 2\,F(x) - 1.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2\,F(x) - 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.}$$

f est paire sur $\mathbb{R}$ donc $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(0).$

Alors $2\,F(0) - 1 = 0$ et ainsi $F(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$ On peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 2\,F(x) - 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$$

G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour $2\,F - 1$. Ainsi G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$:

1. G est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$;

2. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\{0\}$ au moins.

Ceci suffit pour dire que $\boxed{|Y| \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$

$\forall x \in]-\infty,0[,\ G'(x)=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ G'(x)=2\,F'(x)=2\,f(x)$.

Posons alors $\forall x \in]-\infty,0[,\ g(x)=0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x)=2\,f(x)$.

g est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec G' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc g est une densité de $|Y|$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 2\,f(x) & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases} \text{ est une densité de } |Y|.}$$

b. $\boxed{\textbf{Nous supposerons dans cette question que g est définie sur } \mathbb{R}.}$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc $P(|Y|=x)=0$.

Alors $0=P(|Y|=x)=P(Y=x)+P(Y=-x)=P(Y=x)+P(-Y=x)=2\,P(Y=x)$ car Y et $-Y$ ont même loi. Donc $P(Y=x)=0$.

$0=P(|Y|=0)=P(Y=0)$; $P(Y=0)=0$.

Soit x un réel strictement négatif. $-x$ est strictement positif donc $P(Y=-x)=0$. Alors $P(-Y=x)=0$ donc $P(Y=x)=0$ toujours parce que Y et $-Y$ ont même loi. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y=x)=0.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=P(Y \leqslant x)=P(Y<x)+P(Y=x)=P(Y<x)=1-P(Y \geqslant x)=1-P(-Y \leqslant -x)$.

Y et $-Y$ ayant même loi il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=1-P(Y \leqslant -x)=1-F(-x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=1-F(-x).}$$

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $G(x)=P(|Y| \leqslant x)=P(-x \leqslant Y \leqslant x)=P(Y \leqslant x)-P(Y<-x)$.

Or $P(Y=-x)=0$ donc $G(x)=P(Y \leqslant x)-P(Y \leqslant -x)=F(x)-F(-x)=F(x)-\big(1-F(x)\big)=2\,F(x)-1$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x)=\dfrac{1+G(x)}{2}$.

$\forall x \in]-\infty,0],\ -x \in [0,+\infty[$ donc $\forall x \in]-\infty,0],\ F(-x)=\dfrac{1+G(-x)}{2}$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty,0],\ F(x)=1-F(-x)=1-\dfrac{1+G(-x)}{2}=\dfrac{1-G(-x)}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{1-G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1+G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \quad \text{ou } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{1-G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{1+G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \ !!}$$

Montrons alors que Y est une variable aléatoire à densité. Il suffit de montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc g est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Alors G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - D$ et $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ G'(x) = g(x)$.

$x \to -x$ et G sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \dfrac{1+G(x)}{2}$ et $x \to \dfrac{1-G(-x)}{2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.

Posons $D_1 = D \cap]0, +\infty[$ et $D_2 = \{-x; x \in D_1\}$.

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ donc $\dfrac{1+G}{2}$ aussi.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[-D_1$ et $\forall x \in]0, +\infty[-D_1,\ F'(x) = \dfrac{1}{2}\, G'(x) = \dfrac{1}{2}\, g(x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$!

$x \to -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in]-\infty, 0[-D_2,\ -x \in \mathbb{R} - D$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$.

Alors $x \to \dfrac{1-G(-x)}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[-D_2$; F également.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[-D_2,\ F'(x) = \dfrac{1}{2}\, G'(-x) = \dfrac{1}{2}\, g(-x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$.

Posons $\Delta = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$. Δ est une partie finie de $\mathbb{R}$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \Delta$. Ceci achève alors de prouver que :

$$\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R} - \Delta$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec G'. Ainsi f est une densité de $Y = |X|$.

$$\boxed{f : x \to \frac{1}{2}\, g(|x|) \text{ est une densité de } Y.}$$

2. Oui on peut toujours faire le changement de variable $u = e^{2\,t}$ mais il semble plus raisonnable de remarquer que $t \to -\dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \to e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$.

Notons que $t \to e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit A un réel. $\displaystyle\int_0^A e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, dt = \left[-\frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\right]_0^A = -\frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,A}}{2}} + \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

Alors $\displaystyle\int_A^0 e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2A}}{2}} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{c\,e^{2A}}{2} = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, dt$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty} -\frac{c\,e^{2A}}{2} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, dt$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}} + \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}} = \frac{1}{c}\cdot$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\, e^{-\frac{c\,e^{2t}}{2}}\, dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{c}\cdot}$$

3. a. Notons Φ la fonction de répartition de X. φ est une densité de X continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Rappelons également que $\forall t \in [0, +\infty[,\ P(|X| \leqslant t) = 2\,\Phi(t) - 1$.

Cherchons maintenant la fonction de répartition F_Z de Z.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Z \leqslant x) = P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant e^x) = 2\,\Phi(e^x) - 1$.

Φ et $x \to e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $x \to \Phi(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est alors de même pour F_Z et ainsi :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

Z étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F_Z' est une densité de Z.

$\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z'(x) = 2\,e^x\,\Phi'(e^x) = 2\,e^x\,\varphi(e^x) = \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2x}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2x}}{2}}$.

$$\boxed{x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2x}}{2}} \text{ est une densité de } Z.}$$

$$\boxed{x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-x}\, e^{-\frac{e^{-2x}}{2}} \text{ est une densité de } -Z}$$

b. Posons $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2x}}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 0 \times e^{-0} = 0,\ \lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{x - \frac{e^{2x}}{2}}\right) = 0$ et ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors ψ est bornée sur $\mathbb{R}$ (air connu...)

Posons $\displaystyle T = \ln\left|\frac{X}{X'}\right| = \ln|X| + \big(-\ln|X'|\big)$.

- X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes donc $\ln|X|$ et $\big(-\ln|X'|\big)$ sont également indépendantes.

- $\ln|X|$ et $\left(-\ln|X'|\right)$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives ψ et $x \to \psi(-x)$.
- ψ est une densité de $\ln|X|$ et ψ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors T est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,\psi\big(-(x-t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Soit x un réel. $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t}\, e^{-\frac{e^{2t}}{2}}\, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(x-t)}\, e^{-\frac{e^{-2(x-t)}}{2}}\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\, e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\, e^{-\frac{(1+e^{-2x})\, e^{2t}}{2}}\, \mathrm{d}t.$

$1+e^{-2x}$ étant un réel strictement positif nous pouvons utiliser 2 avec $c = 1+e^{-2x}$.

Il vient alors $h(x) = \dfrac{2}{\pi}\, e^{-x}\, \dfrac{1}{1+e^{-2x}}\cdot$ Alors $h(x) = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{2x}\, e^{-x}}{e^{2x}\,(1+e^{-2x})} = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\cdot$

$$\boxed{x \to \frac{2}{\pi}\, \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)} \text{ est une densité de } \ln\left|\frac{X}{X'}\right|\cdot}$$

c. Notons F_T la fonction de répartition de $T = \ln\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ et F_U la fonction de répartition de $U = \left|\dfrac{X}{X'}\right|\cdot$

Observons que : $U = e^{T}$.

U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_U(x) = 0$.

Soit x un réel strictement positif. $F_U(x) = P(U \leqslant x) = P(e^{T} \leqslant x) = P(T \leqslant \ln x) = F_T(\ln x)$.

$F_U(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\ln x} h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^{t}}{(e^{t})^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \lim_{A \to -\infty} \left[\arctan(e^{t})\right]_{A}^{\ln x} = \frac{2}{\pi} \arctan x.$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

Mieux, pour la suite, $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$

F_U est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Alors F_U est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$, et F_U est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Ainsi U est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_U(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_U(x) = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

Posons $\forall x \in]-\infty, 0[,\ f_U(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_U(x) = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

f_U est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_U sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_U est une densité de U

$$\boxed{\text{La fonction } f_U \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \text{ est une densité de } \left|\frac{X}{X'}\right|\cdot}$$

Posons $Y = \dfrac{X}{X'}$.

1) $|Y|$ est une variable aléatoire à densité de densité f_U.

2) D'après **1. a** X et $-X$ ont même loi car X est une variable aléatoire à densité admettant une densité φ continue et paire ; ainsi $Y = \dfrac{X}{X'}$ et $-Y = \dfrac{-X}{X'}$ ont même loi.

En appliquant **1. b** on peut dire que Y est une variable aléatoire à densité et que $x \to \dfrac{1}{2} f_U(|x|)$ en est une densité.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2} f_U(|x|) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+|x|^2} = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2} = f_1(x)$. f_1 est donc une densité de Y. Ainsi

$$\boxed{\frac{X}{X'} \text{ est une variable aléatoire à densité qui suit une loi de Cauchy.}}$$
