ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2009

1

Mathématiques

Option Scientifique

Jeudi 14 mai 2009 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

EXERCICE 1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «trace de A», et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.
Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle M \mid N\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tM\ N\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de M (resp. N) situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Soit A une matrice symétrique, on considère

- l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de A,
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs de Φ_A,
- l'ensemble $\Gamma = \left\{\lambda - \mu, \quad (\lambda, \mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\right\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels A :

★ Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,

★ les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}\left(\Phi_A\right) = \Gamma$.

PARTIE I : Etude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

En déduire la diagonalisabilité de T.

2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associée à 0 de la matrice T.
4. Calculer TX_1 et TX_2 où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$ (*on ne demande pas le calcul de* P^{-1}).

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'application $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \langle M \mid N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Etablir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle \Phi_A(M) \mid N \rangle = \langle M \mid \Phi_A(N) \rangle .$$
   En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
4. Soient
   - $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,
   - $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On pose alors :
$$M_{X,Y} = X\ {}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
   (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$ puis que ${}^tY\ A = \mu^tY$.
   (b) Etablir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.
   (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
   Montrer alors que $M = 0$.
   En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
   On note μ la valeur propre associée à Z_0.
   (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ.
   (c) Conclure.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$$

1. Domaine de définition de f :

   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.

   (b) Soit x un réel fixé. Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $]0,+\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

   $$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :

   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

   (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

   $$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

   (b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

   $$f'(x) = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

   En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. Etude locale de f et f' en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ est convergente.

(b) A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

PROBLEME

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard» et « avec remise» d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

PARTIE I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.
3. Vérifier que
$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b},$$
et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivante est vraie :
$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$
4. Soient M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, .., a_M$ une famille de réels. Etablir que :
$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M.$$
5. En déduire que $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Tournez la page s.v.p.

PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n-ième boule tirée est noire ».
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention $X_0 = 0$.
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\sum^{n} p_{n,k}$?