# EXERCICE 1

(Q1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^z e^{-at}\,dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^z = \frac{1}{a}(1-e^{-az})$.

$\lim_{z \mapsto +\infty} \int_0^z e^{-at}\,dt = \lim_{z \mapsto +\infty}\left(\frac{1}{a}(1-e^{-az})\right) = \frac{1}{a}$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

Pour tout $a$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

Remarque. On pouvait encore obtenir ce résultat en utilisant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $a$.

Soit $x$ dans $\mathbb{R}_+$. Nous allons en fait montrer que pour tout $r$ dans $\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^r}$ converge. Cela permettra de justifier l'existence de $g(x)$...

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto (x+e^t)^r$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc

- $\varphi_r : t \mapsto \frac{1}{(x+e^t)^r}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$.

- $\forall t \in [0,+\infty[$, $x+e^t \geq e^t > 0$. Donc $\forall t \in [0,+\infty[$, $(x+e^t)^r \geq e^{rt} > 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 < \varphi_r(t) = \frac{1}{(x+e^t)^r} \leq \frac{1}{e^{rt}} = e^{-rt}$ (*)

De plus $\int_0^{+\infty} e^{-rt}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{r}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} \varphi_r(t)\,dt$ converge.

De plus (*) montre que $0 < \int_0^{+\infty} \varphi_r(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-rt}\,dt = \frac{1}{r}$ ... car $0 < +\infty$ !

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour tout $r$ dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+e^t)^r}$ converge et

$$0<\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+e^t)^r}\leqslant\frac{1}{r}.$$

En particulier $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+e^t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+e^t)^2}$ converge pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+$ l'intégrale $f(x)$ (resp. $g(x)$) converge.

Q2 Soient $x$ et $t$ deux éléments de $\mathbb{R}_+$.

$0\leqslant(\sqrt{x}-e^{t/2})^2=x-2\sqrt{x}\,e^{t/2}+e^t$ ; $2\sqrt{x}\,e^{t/2}\leqslant x+e^t$ ; $2\sqrt{xe^t}\leqslant x+e^t$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+, \forall t\in\mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{xe^t}\leqslant x+e^t.$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0<2\sqrt{xe^t}\leqslant x+e^t$ donc $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0\leqslant\dfrac{1}{x+e^t}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{xe^t}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t/2}\,dt$ converge et vaut $1/(1/2)$

Donc $\displaystyle 0\leqslant f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+e^t}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-t/2}\,dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times 1/(1/2)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ... car $0\leqslant+\infty$ !

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Q3 Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $x<y$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{x+e^t}-\dfrac{1}{y+e^t}=\dfrac{y+e^t-x-e^t}{(x+e^t)(y+e^t)}=\dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $x+e^t\geqslant e^t>0$ et $y+e^t\geqslant e^t>0$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $(x+e^t)(y+e^t)\geqslant e^{2t}>0$.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0<\dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\leqslant\dfrac{1}{e^{2t}}=e^{-2t}$ et $y-x>0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq (y-x)e^{-2t}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \dfrac{1}{x+e^t} - \dfrac{1}{y+e^t} \leq (y-x)e^{-2t}$. (*)

De plus $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{x+e^t}$ existe et vaut $f(x)$, $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{y+e^t}$ existe et vaut $f(y)$, $\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Alors en intégrant (*) il vient : $0 \leq f(x) - f(y) \leq (y-x) \times \frac{1}{2}$ ... car $0 \leq +\infty$.

$\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad x < y \Rightarrow 0 \leq f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}}$.

**Q4** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

<u>1er cas.</u> $x < y$. Alors $|f(x) - f(y)| \overset{f(x)-f(y) \geq 0}{=} f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2}|y-x|$.

Donc $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|y-x| = \frac{1}{2}|x-y|$.

<u>2ème cas.</u> $x > y$.

$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| \overset{y < x}{=} f(y) - f(x) \leq \dfrac{x-y}{2} = \frac{1}{2}|x-y|$.

On a donc encore $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

<u>3ème cas.</u> $x = y$.

$|f(x) - f(y)| = 0 \leq \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}|x-y|$.

Finalement $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|}$.

Soit $b \in \mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |f(x) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|x-b|$ et $\lim\limits_{x \to b} \left(\frac{1}{2}|x-b|\right) = 0$.

Alors par encadrement : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$ ; $f$ est continue en $b$ et ceci pour tout $b \in \mathbb{R}^+$.

Donc $\underline{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$

Nous avons vu dans Q3 que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ x < y \Rightarrow 0 < f(x) - f(y)$.

Alors $f$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t} = I_1 = 1$. $f(0) = 1$

$\forall x \in ]0, +\infty[,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Par encadrement $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.

Le théorème de la bijection et les résultats précédents permettent de dire que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

(Q5) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = f(x) - x$.

- $h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
- $f$ et $x \mapsto -x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$.
- $h(0) = f(0) - 0 = 1$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = -\infty$ car $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} (-x) = -\infty$

Le théorème de la bijection permet alors de dire que $h$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$.

$0 \in ]-\infty, 1]$ donc $\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ h(\alpha) = 0$.

$\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ f(\alpha) - \alpha = 0$. $\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ f(\alpha) = \alpha$.

L'équation $x \in \mathbb{R}_+$ et $f(x) = x$ admet une solution et une seule $\alpha$.

$h(1) = f(1) - 1 \overset{Q2}{\leq} \frac{1}{\sqrt{1}} - 1 = 0 = h(\alpha)$ et $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $1 \geq \alpha \geq 0$. $h(0) = f(0) - 0 = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$. Ainsi $\alpha \in ]0, 1]$.

(Q6) Montrons par récurrence que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ : $u_n$ existe, $u_n \in \mathbb{R}_+$ et $|\alpha - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

$\alpha \in ]0,1]$

- $u_0 = 0$. Donc $u_0$ existe et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. $|\alpha - u_0| = |\alpha| = \alpha \leqslant 1 = \frac{1}{2^0}$.

la propriété est donc vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$u_n$ est donc un élément de $\mathbb{R}_+$ tel que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Alors $f(u_n)$ existe donc $\underline{u_{n+1} \text{ existe}}$.

$u_{n+1} = f(u_n) \in f(\mathbb{R}_+) = ]0,1]$. Alors $\underline{u_{n+1} \in \mathbb{R}_+}$

$u_n \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

Alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. $\underline{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$.

Ceci achève la récurrence.

$$\underline{\underline{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe},\ u_n \in \mathbb{R}^+ \text{ et } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}.}}$$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Alors par encadrement $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}}$.

b) Nous écrivons une fonction et une procédure faisant le travail demandé.

Profitons de l'occasion pour dire que tout cela est bien artificiel ! En effet $f(0) = 1$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{xe^{-t}+1}\,dt = \lim_{3 \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\ln(xe^{-t}+1)\right]_0^{3} = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Donc en deux lignes on peut dire que $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in ]0,+\infty[ . \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c'est ce que l'on obtiendra péniblement avec Q7 et Q8.

R



Notons qu'avec ce programme on obtient par exemple $\alpha \simeq 0,74688$

```
*************************************************************

function f(x:real):real;

begin
if x=0 then f:=1
       else f:=(ln(x+1))/x;
end;

*************************************************************
```

N'était pas demandé... et pour cause

```
function ecricome2012(epsi:real;var N:integer):real;
```

Permet de récupérer N

```
var u,stop:real;

begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do

      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;

ecricome2012:=u;
```

<-- Permet de récupérer la valeur de $u_N$.

```
end;

*************************************************************

procedure ecricome_2012(epsi:real;var N:integer;var u:real);
```

Permet de récupérer N

Permet de récupérer $u_N$.

```
var stop:real;

begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do

      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;

end;
```

(Q7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $h$ un réel tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$

Posons $\Delta(h) = f(x+h) - f(x) + h\,g(x)$.

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} + h\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}.$$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt.$$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)^2 - (x+h+e^t)(x+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\, dt$$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)^2 - (x+e^t)^2 - h(x+e^t) + h(x+e^t) + h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\, dt$$

$$\Delta(h) = h^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}.$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\quad x+h+e^t \geqslant e^t > 0$ et $(x+e^t)^2 \geqslant e^{2t} > 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $(x+h+e^t)(x+e^t)^2 \geqslant e^{3t} > 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leqslant \frac{1}{e^{3t}} = e^{-3t}$$

$\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{3}$. Comme $0 \leq +\infty$ (!) :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt = \frac{1}{3} \quad \text{et } h^2 \geqslant 0.$$

Alors $0 \leq \Delta(h) = h^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leq \frac{h^2}{3}$.

ce qui donne $|\Delta(h)| \leq \frac{h^2}{3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $x+h \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |f(x+h) - f(x) + h\,g(x)| \leq \frac{h^2}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*$, $]x-\delta, x+\delta[ \subset \mathbb{R}_+^*$ (on peut prendre $\delta = \frac{x}{2}$).

Soit $h \in ]-\delta, \delta[ - \{0\}$. Alors $x+h \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \neq 0$.

Donc $\left| \dfrac{f(x+h) - f(x) + h\, g(x)}{h} \right| = \dfrac{|\Delta(h)|}{|h|} \leq \dfrac{h^2}{\delta |h|} = \dfrac{1}{\delta} |h|$

Ainsi $\forall h \in ]-\delta, \delta[ - \{0\}$, $\left| \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - (-g(x)) \right| \leq \dfrac{1}{\delta} |h|$.

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \left( \dfrac{1}{\delta} |h| \right) = 0$ il vient par encadrement : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = -g(x)$.

Donc $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) = -g(x)$.

<u>Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) = -g(x)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Notons que l'on aurait pu dans ce qui précède prendre $x$ dans $\mathbb{R}_+$ ...

Q8 $x \mapsto x$ et $f$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(x) = f(x) + x f'(x) = f(x) - x g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t) - x}{(x+e^t)^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\, dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(x) = \lim\limits_{z \to +\infty} \displaystyle\int_0^z \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\, dt = \lim\limits_{z \to +\infty} \left[ -\frac{1}{x+e^t} \right]_0^z = \lim\limits_{z \to +\infty} \left( -\frac{1}{x+e^z} + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{x+1}$.

<u>$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.</u> Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = \ln|1+x| + \lambda$ car $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle. $\lambda = \lim\limits_{x \to 0^+} \left( \ln|1+x| + \lambda \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} T(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x f(x)) = 0 \times f(0) = 0$. $\lambda = 0$.
$f$ est continue en 0

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = \ln|1+x|$. <u>$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = \ln(1+x)$.</u>

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. <u>$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.</u>

# EXERCICE 2

## Q1 Deux résultats préliminaires.

a) $(I_n - U)\left(\sum_{\ell=0}^{q-1} U^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{q-1} U^\ell - \sum_{\ell=0}^{q-1} U^{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{q-1} U^\ell - \sum_{\ell=1}^{q} U^\ell = U^0 - U^q = I_n - U^q \underset{U^q = 0_n}{=} I_n.$

$(I_n - U)\left(\sum_{\ell=0}^{q-1} U^\ell\right) = I_n.$

Ceci suffit pour dire que $I_n - U$ est inversible et $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^\ell$.

b) $A(A - I_n) = 0_n$ donc $f\circ(f - Id_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Mieux $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = f\circ(f - Id_{\mathbb{R}^n}) = f\circ f - f = (f - Id_{\mathbb{R}^n})\circ f$.

Ainsi $f\circ(f - Id_{\mathbb{R}^n}) = (f - Id_{\mathbb{R}^n})\circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $(f\circ(f - Id_{\mathbb{R}^n}))(x) = ((f - Id_{\mathbb{R}^n})\circ f)(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $f(f(x) - x) = (f - Id_{\mathbb{R}^n})(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $f(x) - x \in \operatorname{Ker} f$ et $f(x) \in \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

Comme $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel : $x - f(x) = -(f(x) - x)$ est aussi dans $\operatorname{Ker} f$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ et $f(x) \in \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $x = (x - f(x)) + f(x)$, $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ et $f(x) \in \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

Alors $x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ et ceci pour tout $x$ dans $\mathbb{R}^n$.

Cela permet de dire que $\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

Comme $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ :

$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathbb{R}^n$. Finalement $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

Montrons que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$. $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $f(x) = x$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ker $f$ et Ker $(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe.

Ceci achève de montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$.

Remarque.. $f \circ (f - Id_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ donne $f^2 = f$. $f$ est une projection ! le résultat précédent est du cours !!

Notons que $X(X-1)$ est un polynôme annulateur dont les zéros sont 0 et 1.

Ainsi le spectre de $f$ est contenu dans $\{0, 1\}$.

1er cas.. $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n}) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Alors 0 et 1 sont valeurs propres de $f$. Mieux 0 et 1 sont LES valeurs propres de $f$.

Comme $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$ : $f$ est diagonalisable.

2e cas.. $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n})$. Ainsi $f = Id_{\mathbb{R}^n}$.

$f$ est donc diagonalisable.

3e cas.. $\operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f$. $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

$f$ est encore diagonalisable !

Dans tous les cas l'endomorphisme $f$ est diagonalisable. La matrice $A$ est également diagonalisable.

Remarque.. Si $f = Id_{\mathbb{R}^n}$ : $\operatorname{Sp} f = \{1\}$

Si $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ : $\operatorname{Sp} f = \{0\}$

Si $f \neq Id_{\mathbb{R}^n}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ : $\operatorname{Sp} f = \{0, 1\}$.

Remarque sans intérêt destinée à terminer la page !

## Q2 Etude d'une suite de matrices.

Montrons quelques résultats préliminaires avant de commencer.

---

(*) $U$ et $V$ sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

- R1 Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $U^k$ commute avec $V$.
- R2 Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ et pour tout $q$ dans $\mathbb{N}$, $U^k$ et $V^q$ commutent.
- R3 $P$ et $Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ : $P(U)$ et $Q(V)$ commutent, $P(U)$ et $V$ également.
- R4 Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $(UV)^k = U^k V^k$ et en particulier $(UV)^2 = U^2V^2$.
- R5 Si $U$ est inversible : $V$ commute avec $U^{-1}$, $V^q$ commute avec $U^{-1}$ pour tout $q$ dans $\mathbb{N}$ et $Q(V)$ commute avec $U^{-1}$ pour tout $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$

---

**Preuves** R1. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U^kV = VU^k$.

- c'est clair pour $k=0$ car $U^k = I_n$ si $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$U^{k+1}V = U(U^kV) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse de récurrence}}}{=} U(VU^k) = (UV)U^k = (VU)U^k = VU^{k+1}$. Ce qui achève la récurrence et la preuve de R1.

R2 Soit $(k,q)\in\mathbb{N}^2$. D'après R1 $U^k$ commute avec $V$.

Donc $V$ commute avec $U^k$ ! R1 permet alors de dire que $V^q$ commute avec $U^k$.

Ainsi $U^k$ et $V^q$ commutent.

R3 $\exists r\in\mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell X^\ell$ et $\exists s\in\mathbb{N}$, $\exists (b_0, b_1, \dots, b_s)\in\mathbb{R}^{s+1}$, $Q = \sum_{k=0}^{s} b_k X^k$.

$$P(U)Q(V) = \left(\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell U^\ell\right)\left(\sum_{q=0}^{s} b_q V^q\right) = \sum_{\ell=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} a_\ell b_q U^\ell V^q \overset{R2}{=} \sum_{\ell=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} a_\ell b_q V^q U^\ell.$$

$$P(U)Q(V) = \sum_{q=0}^{s}\sum_{\ell=0}^{r} b_q a_\ell V^q U^\ell = \left(\sum_{q=0}^{s} b_q V^q\right)\left(\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell U^\ell\right) = Q(V)P(U).$$

**R4** Montrons le résultat par récurrence.

- $(UV)^0 = I_n = I_n \times I_n = U^0 V^0$, la propriété est vraie pour $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$$(UV)^{k+1} = (UV)(UV)^k \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} (UV)(U^k V^k) = U(VU^k)V^k \underset{R1}{=} U(U^k V)V^k = U^{k+1}V^{k+1}.$$

ceci achève la récurrence et la preuve de R4

**R5** $UV = VU$ par hypothèse. Alors $U^{-1}(UV)U^{-1} = U^{-1}(VU)U^{-1}$

donc $VU^{-1} = U^{-1}V$. $V$ commute avec $U^{-1}$.

R1 donne alors : $\forall q \in \mathbb{N}$, $V^q$ commute avec $U^{-1}$.

R3 donne : $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(V)$ commute avec $U^{-1}$.

---

(*)(*) $U$, $V$, $W$ sont trois matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $U$ commute avec $V$ et $W$.

- R6 $U$ commute avec le produit $VW$.
- R7 Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ : $U$ commute avec $\alpha V + \beta W$.

---

**Preuves** **R6** $U(VW) = (UV)W = (VU)W = V(UW) = V(WU) = (VW)U$.

**R7** $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $U(\alpha V + \beta W) = \alpha UV + \beta UW = \alpha VU + \beta WU = (\alpha V + \beta W)U$.

---

(*)(*)(*) Un rappel de cours.. $U$ et $V$ sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent

- R8 $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $(U+V)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} U^k V^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} U^{r-k} V^k$.
- R9 $(U+V)^2 = U^2 + 2UV + V^2$ et $(U-V)^2 = U^2 - 2UV + V^2$.

---

(*)(*)(*)(*) $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = O_n$

- R10 $\forall s \in [\![ r, +\infty [\![$, $A^s = O_n$.

---

**Preuve..** $\forall s \in [\![ r, +\infty [\![$, $A^s = A^{s-r} A^r = A^{s-r} O_n = O_n$.

---

<u>a)</u> $2B$ et $I_n$ commutent donc $(2B-I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n$ (R9)

Alors $I_n - (2B-I_n)^2 = 4B - 4B^2 = -4\,B(B-I_n)$.

Ainsi $\left(I_n - (2B-I_n)^2\right)^N = (-4)^N \left(B(B-I_n)\right)^N = (-4)^N O_n = O_n$.

Donc $I_n - (2B-I_n)^2$ est nilpotente.

Alors d'après Q1 a) $I_n - (I_n - (2B-I_n)^2)$ est inversible. Donc $(2B-I_n)^2$ est inversible. Montrons alors que $2B-I_n$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(2B-I_n)X = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $(2B-I_n)^2 X = (2B-I_n)\,O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme $(2B-I_n)^2$ est inversible :

$X = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(2B-I_n)X = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc $2B-I_n$ est inversible.

1. $2B_0 - I_n = 2B - I_n$ donc $2B_0 - I_n$ est inversible.

2. $B_0 - B = O_n$. Posons $C_0 = O_n$.

   Alors $C_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_0 - B = O_n = B(B-I_n)\,O_n = B(B-I_n)\,C_0$.

3. $B_0(B_0 - I_n) = B(B-I_n) = \left[B(B-I_n)\right]^{2^0} = \left[B(B-I_n)\right]^{2^0} I_n$.

   Posons alors $D_0 = I_n$. $D_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_0(B_0-I_n) = \left[B(B-I_n)\right]^{2^0} D_0$.

4. $B_0 B = B^2 = B B_0$.

5. $C_0 B = O_n B = O_n = B\,O_n = B\,C_0$.

6. $D_0 B = I_n B = B = B\,I_n = B\,D_0$.

La propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

b) Ici on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour un $k$ dans $\mathbb{N}$.

Alors A1 $2B_k - I_n$ est inversible

A2 $\exists\, C_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_k - B = B(B-I_n)C_k$

A3 $\exists\, D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_k(B_k - I_n) = (B(B-I_n))^{2^k} D_k$

A4 $B_k B = B B_k$ A5 $C_k B = B C_k$ A6 $D_k B = B D_k$.

Notons que $B_{k+1}$ est définie car $2B_k - I_n$ est inversible.

* $2B_{k+1} - I_n = 2B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - I_n = 2B_k^2(2B_k - I_n) - (2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}$.

$2B_{k+1} - I_n = (2B_k^2 - 2B_k + I_n)(2B_k - I_n)^{-1} = (I_n + 2B_k(B_k - I_n))(2B_k - I_n)^{-1}$.

$\underline{\underline{2B_{k+1} - I_n = (I_n + 2B_k(B_k - I_n))(2B_k - I_n)^{-1}}}$.

* $B_{k+1} - B = B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - B(2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} = (B_k^2 - 2BB_k + B)(2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_{k+1} - B = (B_k^2 - 2BB_k + B^2 - B^2 + B)(2B_k - I_n)^{-1}$.

d'après A4, $B_k$ et $B$ commutent donc $(B_k - B)^2 \overset{R9}{=} B_k^2 - 2B_kB + B^2 = B_k^2 - 2BB_k + B^2$.

Alors $\underline{\underline{B_{k+1} - B = [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)](2B_k - I_n)^{-1}}}$.

* $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}[B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - (2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}]$.

$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}(B_k^2 - 2B_k + I_n)(2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}(B_k - I_n)^2(2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_k$ et $I_n$ commutent donc $B_k^2 - 2B_k + I_n = (B_k - I_n)^2$ d'après R9

$B_k$ commute avec $2B_k - I_n$ car $B_k$ commute avec $B_k$ et $I_n$ (R7).

Alors tout polynôme de $B_k$ commute avec $(2B_k - I_n)^{-1}$ (R5).

Donc $(B_k - I_n)^2 = B_k^2 - 2B_k + I_n$ commute avec $(2B_k - I_n)^{-1}$

On peut alors écrire que : $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2(B_k - I_n)^2(2B_k - I_n)^{-1}(2B_k - I_n)^{-1}$

$$B_{k+1}(B_{k+1}-I_n) = B_k^2(B_k-I_n)^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2 \underset{\uparrow}{=} \left[B_k(B_k-I_n)\right]^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$$

$[B_k(B_k-I_n)]^2 = B_k^2(B_k-I_n)^2$ car $B_k$ et $B_k-I_n$ commutent (R4).

Nous avons montré plus haut que tout polynôme de $B_k$ commute avec $(2B_k-I_n)^{-1}$.

Alors $B_k(B_k-I_n)$ et $(2B_k-I_n)^{-1}$ commutent.

R4 permet alors de dire que $[B_k(B_k-I_n)]^2[(2B_k-I_n)^{-1}]^2 = [B_k(B_k-I_n)(2B_k-I_n)^{-1}]^2$.

Ceci achève de montrer que : $\underline{\underline{B_{k+1}(B_{k+1}-I_n) = [B_k(B_k-I_n)(2B_k-I)^{-1}]^2}}$.

Dès lors montrons que $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie. Il y a six points à établir.

(1) Montrons que $2B_{k+1}-I_n$ est inversible. $2B_{k+1}-I_n = [I_n+2B_k(B_k-I_n)](2B_k-I_n)^{-1}$

Comme $(2B_k-I_n)^{-1}$ est inversible il suffit de montrer que $I_n+2B_k(B_k-I_n)$ est inversible car le produit de deux matrices inversibles est inversible.

$D_k$ commute avec $B$ d'après A6. Alors $D_k$ commute avec tout polynôme de $B$ d'après R3 donc $[B(B-I_n)]^{2^k}$ et $D_k$ commutent ($(B(B-I_n))^{2^k}$ est bien un polynôme de $B$ car $B(B-I_n) = B^2-B$, $B^2$ et $B$ commutent donc la formule du binôme donne ce résultat).

Alors R4 donne :

$$(B_k(B_k-I_n))^N = \left([B(B-I_n)]^{2^k}D_k\right)^N = \left([B(B-I_n)]^{2^k}\right)^N D_k^N = \left([B(B-I_n)]^N\right)^{2^k} D_k^N$$

Or $(B(B-I_n))^N = O_n$ donc $(B_k(B_k-I_n))^N = O_n^{2^k} D_k^N = O_n D_k^N = O_n$.

Ainsi $B_k(B_k-I_n)$ est nilpotente. Il en est clairement de même pour $-B_k(B_k-I_n)$.

Alors d'après Q1 a) : $I_n - (-B_k(B_k-I_n))$ est inversible.

Donc $I_n + B_k(B_k-I_n)$ est inversible.

Finalement $\underline{\underline{2B_{k+1}-I_n = [I_n+B_k(B_k-I_n)](2B_k-I_n)^{-1}}}$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

(2) $B_{k+1} - B = [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)](2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_{k+1} - B \underset{A2}{=} [(B(B-I_n)C_k)^2 - (B^2 - B)](2B_k - I_n)^{-1}$.

$C_k$ commute avec $B$ donc avec $B(B-I_n)$ (R3)

Alors R4 permet de dire que $(B(B-I_n)C_k)^2 = (B(B-I_n))^2 C_k^2 = B(B-I_n)B(B-I_n)C_k^2$.

Donc $B_{k+1} - B = [B(B-I_n)B(B-I_n)C_k^2 - B(B-I_n)](2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_{k+1} - B = B(B-I_n)[B(B-I_n)C_k^2 - I_n](2B_k - I_n)^{-1}$.

Posons $C_{k+1} = (B(B-I_n)C_k^2 - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}$.

$C_{k+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_{k+1} - B = [B(B-I_n)]C_{k+1}$.

(3) $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}]^2 \overset{\text{cela a été vu plus haut}}{=} (B_k(B_k - I_n))^2 (2B_k - I_n)^{-2}$.

A3 donne $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = [(B(B-I_n))^{2^k} D_k]^2 (2B_k - I_n)^{-2}$.

Nous avons vu plus haut que $(B(B-I_n))^{2^k}$ et $D_k$ commutent.

Alors, d'après R4, $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = (B(B-I_n)^{2^k})^2 D_k^2 (2B_k - I_n)^{-2}$.

$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = (B(B-I_n))^{2^{k+1}} D_k^2 (2B_k - I_n)^{-2}$. Posons $D_{k+1} = D_k^2 (2B_k - I_n)^{-2}$.

Alors $D_{k+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = [B(B-I_n)]^{2^{k+1}} D_{k+1}$.

(4) $B$ commute avec $B_k$ donc avec $2B_k - I_n$ (R7)

Alors $B$ commute avec $(2B_k - I_n)^{-1}$ (R5)

$B$ commute avec $B_k$ donc avec $B_k^2$ (R1)

Alors $B$ commute avec le produit $B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}$ (R6) donc avec $B_{k+1}$.

$B B_{k+1} = B_{k+1} B$.

(5) $C_{k+1} = \left(B(B-I_n)C_k^2 - I_n\right)(2B_k - I_n)^{-1}$.

B commute avec $C_k$ donc avec $C_k^2$ (A5 et R1).

B commute avec B donc avec $B(B-I_n)$ qui est un polynôme de B (R3).

Alors B commute avec $B(B-I_n)C_k^2$ (R6) et avec $I_n$.

Donc B commute avec $B(B-I_n)C_k^2 - I_n$ (R7).

B commute avec $B_k$ donc avec $2B_k - I_n$ (A4 et R3) ; alors B commute avec $(2B_k - I_n)^{-1}$ (R5).

Par produit, B commute avec $\left(B(B-I_n)C_k^2 - I_n\right)(2B_k - I_n)^{-1}$ c'est à dire avec $C_{k+1}$ (R6)

Par conséquent : $\underline{\underline{C_{k+1}B = BC_{k+1}}}$

(6) $D_{k+1} = D_k^2 (2B_k - I)^{-2}$

B commute avec $D_k$ donc avec $D_k^2$ (A6 et R1)

Nous venons de voir que B commute avec $(2B_k - I_n)^{-1}$ donc B commute avec $\left((2B_k - I_n)^{-1}\right)^2$ c'est à dire avec $(2B_k - I_n)^{-2}$ (R1).

Alors B commute avec $D_k^2 (2B_k - I)^{-2}$ (R6). B commute avec $D_{k+1}$.

$\underline{\underline{D_{k+1}B = BD_{k+1}}}$

<u>ce qui achève de montrer que $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.</u>

ceci achève aussi la récurrence proposée...

Donc <u>$(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.</u>

<u>conclusion..</u> Pour tout $k \in \mathbb{N}$

A1 $2B_k - I_n$ est inversible

A2 $\exists C_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_k - B = B(B-I_n)C_k$

A3 $\exists D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_k(B_k - I_n) = \left(B(B-I_n)\right)^{2^k} D_k$

A4 $B_k B = B B_k$

A5 $C_k B = B C_k$

A6 $D_k B = B D_k$

c] $\lim_{\ell \to +\infty} 2^\ell = +\infty$. Alors $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $\forall \ell \in [\![p, +\infty[\![$, $2^\ell \geq N$.

Comme $(B(B-I_n))^N = O_n$ : $\forall \ell \in [\![p, +\infty[\![$, $(B(B-I_n))^{2^\ell} = O_n$ (R 10).

En particulier $(B(B-I_n))^{2^p} = O_n$.

Or $\exists\, D_p \in M_n(\mathbb{R})$, $B_p(B_p - I_n) = (B(B-I_n))^{2^p} D_p$.

Donc $B_p(B_p - I_n) = O_n D_p = O_n$.

<u>$\exists\, p \in \mathbb{N}$, $B_p(B_p - I_n) = O_n$.</u>

d'après Q 1 b] <u>la matrice $B_p$ est diagonalisable.</u>

$B_p - B = (B(B-I_n))C_p$ et nous avons déjà vu que $B(B-I_n)$ et $C_p$ commutent.

Alors $(B_p - B)^N = (B(B-I_n))^N C_p^N$ (R 4).

Or $(B(B-I_n))^N = O_n$ donc $(B_p - B)^N = O_n C_p^N = O_n$.

<u>$B_p - B$ est nilpotente.</u> <u>Remarque</u>... En fait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k - B$ est nilpotente...

Soit $k \in [\![p, +\infty[\![$. Nous avons vu plus haut que $(B(B-I_n))^{2^k} = O_n$.

Or $\exists\, D_k \in M_n(\mathbb{R})$, $B_k(B_k - I_n) = [B(B-I_n)]^{2^k} D_k$.

Ainsi $B_k(B_k - I_n) = O_n D_n = O_n$. $B_k^2 - B_k = O_n$.

$4B_k^2 - 4B_k = O_n$ ; $4B_k^2 - 4B_k + I_n = I_n$ ; $(2B_k - I_n)^2 \overset{B_k I_n = I_n B_k \ (R9)}{=} 4B_k^2 - 4B_k + I_n = I_n$

Alors $(2B_k - I_n)^{-1} = 2B_k - I_n$.

Donc $B_{k+1} = B_k^2 (2B_k - I_n)^{-1} = B_k^2(2B_k - I_n) \overset{B_k^2 = B_k}{=} B_k(2B_k - I_n) = 2B_k^2 - B_k \overset{B_k^2 = B_k}{=} 2B_k - B_k = B_k$

<u>$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $B_{k+1} = B_k$.</u> La suite $(B_k)_{k \geq p}$ est constante. Alors <u>$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $B_k = B_p$.</u>

# PROBLÈME

## PARTIE I : Etude de deux endomorphismes

⚠ Nous utiliserons le plus possible les polynômes dans ce qui suit.

(Q1) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $X-1 \in \mathbb{R}_1[X]$ donc par produit $(X-1)P' \in \mathbb{R}_n[X]$

Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ : $(X-1)P' + P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

<u>$g$ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

• Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$g(\lambda P+Q) = (X-1)(\lambda P+Q)' + \lambda P + Q = (X-1)(\lambda P' + Q') + \lambda P + Q = \lambda((X-1)P'+P) + (X-1)Q' + Q$

$g(\lambda P+Q) = \lambda g(P) + g(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, g(\lambda P+Q) = \lambda g(P) + g(Q)$. <u>$g$ est linéaire.</u>

Finalement <u>$g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

(Q2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $Q = g(P)$ et calculons $f(Q)$. $Q = g(P) = ((X-1)P)'$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Supposons $x \neq 1$. $f(Q)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x Q(t)\,dt = \dfrac{1}{x-1}\Big[(t-1)P(t)\Big]_1^x = \dfrac{(x-1)P(x)}{x-1} = P(x)$.

- Supposons que $x = 1$.

  $f(Q)(x) = f(Q)(1) = Q(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1) = P(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(Q)(x) = P(x)$. $f(Q) = P$. $f(g(P)) = P$.

<u>$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(g(P)) = P$.</u>

Soit $P \in \operatorname{Ker} g$. $g(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors $P = f(g(P)) = f(0_{\mathbb{R}_n[X]})$.

Calculons alors $f(0_{\mathbb{R}_n[X]})$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x 0\,dt = 0$ et

$f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}(1) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(x) = 0$. Alors $f(0_{\mathbb{R}_n[X]}) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Donc $P = f(0_{\mathbb{R}_n[X]}) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} g \subset \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Comme $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\} \subset \operatorname{Ker} g$ : $\underline{\underline{\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}}}$.

Q3 $g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

Alors $g$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie : $g$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

<u>Alors $g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$</u>.

<u>Remarque</u>.. Pour faire plaisir au correcteur disons aussi que $g$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) = f(g(g^{-1}(P))) \overset{Q2}{=} g^{-1}(P)$.

Ainsi 1) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Nous pouvons désormais considérer $f$ comme une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = g^{-1}(P)$.

Alors $\underline{\underline{f = g^{-1}}}$ ou $\underline{\underline{g^{-1} = f}}$ !

$g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $g^{-1}$ est également un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
<u>$f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$</u> ... donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ !

Q4 * Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

→ $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(e_k)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x t^k\,dt = \dfrac{1}{x-1}\left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \dfrac{x^{k+1}-1}{x-1} \times \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}(1+x+\dots+x^k)$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(e_k)(x) = \dfrac{1}{k+1}(e_0+e_1+\dots+e_k)(x) = \left(\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i\right)(x)$

→ $f(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} 1 = \dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} e_i(1) = \left(\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} e_i\right)(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(e_k)(x) = \left( \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} e_i \right)(x)$.

Alors $f(e_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} e_i$ et ceci pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

* Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$g(e_k) = (X-1)\,e'_k + e_k$.

Si $k=0$ : $g(e_k) = g(e_0) = (X-1)\, 0_{\mathbb{R}_n[X]} + e_0 = e_0$

Si $k \neq 0$ : $g(e_k) = (X-1)kX^{k-1} + e_k = kX^k - kX^{k-1} + e_k = (k+1)e_k - k e_{k-1}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $g(e_k) = (k+1)e_k - k e_{k-1}$ et $g(e_0) = e_0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(k+1) & \cdots & 1/(n+1) \\ & 1/2 & \cdots & 1/(k+1) & \cdots & 1/(n+1) \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1/(k+1) & & \vdots \\ & (0) & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1/(n+1) \end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & 2 & -2 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 3 & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & -k & \ddots & \vdots \\ & & & & k+1 & \ddots & 0 \\ & (0) & & & & \ddots & -n \\ & & & & & & n+1 \end{pmatrix}$$

(Q5) A et B sont deux matrices de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures.

Le spectre de A (resp. B) est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Alors $Sp\,A$ (resp. $Sp\,B$) est $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}\}$ (resp. $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$) et

$1 > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{n+1}$ (resp. $1 < 2 < \cdots < n+1$).

A et B sont donc deux matrices de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ ayant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Alors A et B sont diagonalisables.

Ainsi f et g sont diagonalisables.

## PARTIE II : Etude d'une suite de variables aléatoires

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in [\![0,n]\!]$.

$(\{Z_k = i\})_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne : $P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=0}^{n} P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\})$.

Soit $i \in [\![0,n]\!]$

1er cas.. $i < r$. Si $\{Z_k = i\}$ est réalisé le $(k+1)$-ème tirage se fait alors dans $U_i$ qui contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \dots, i$ donc il ne peut pas donner une boule numérotée $r$ car $r > i$ !

Ainsi $\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\} = \emptyset$ ; $P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) = 0$.

2ème cas.. $i \geq r$.

a) $P(Z_k = i) \neq 0$. Alors $P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) = P(Z_k = i) \times P_{\{Z_k = i\}}(Z_{k+1} = r)$.

Supposons $\{Z_k = i\}$ réalisé. Le $(k+1)$-ième tirage se fait dans $U_i$ qui contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, 2, \dots, i$. La probabilité pour qu'il donne la boule numéro $r$ est alors $\frac{1}{i+1}$. Donc $P_{\{Z_k = i\}}(Z_{k+1} = r) = \frac{1}{i+1}$.

Alors $P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) = P(Z_k = i) \times \frac{1}{i+1} = \frac{P(Z_k = i)}{i+1}$.

b) $P(Z_k = i) = 0$.

$\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}$ est contenu dans $\{Z_k = i\}$.

Donc $0 \leq P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) \leq P(Z_k = i) = 0$.

Alors $P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) = 0 = \frac{0}{i+1} = \frac{P(Z_k = i)}{i+1}$ ... le résultat de a) vaut encore !

Finalement $P(\{Z_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = r\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < r \\ \frac{P(Z_k = i)}{i+1} & \text{si } i \geq r. \end{cases}$

Alors $P(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=0}^{n} P(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k=i)}{i+1}$ et ceci pour tout $r\in[\![0,n]\!]$.

Vérifions que ce résultat vaut encore pour $k=0$.

Rappelons que le premier tirage se fait dans $U_n$.

Alors $\forall r\in[\![0,n]\!]$, $P(Z_1=r)=\frac{1}{n+1}$. Rappelons aussi que $Z_0$ est la variable certaine égale à $n$.

Donc $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(Z_0=i)=\begin{cases}1 & \text{si } i=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\forall r\in[\![0,n]\!]$, $\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_0=i)}{i+1}=\frac{P(Z_0=n)}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

Donc $\forall r\in[\![0,n]\!]$, $P(Z_1=r)=\frac{1}{n+1}=\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_0=i)}{i+1}$. Plus de doute :

$\forall k\in\mathbb{N}, \forall r\in[\![0,n]\!], \quad P(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}$.

---

Q2 Soit $k\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,n-1]\!]$.

- $(n+1)P(Z_{k+1}=n)=(n+1)\sum_{i=n}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}=(n+1)\frac{P(Z_k=n)}{n+1}=P(Z_k=n)$.

- $(r+1)P(Z_{k+1}=r)-(r+1)P(Z_{k+1}=r+1)=(r+1)\left[\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}-\sum_{i=r+1}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}\right]=(r+1)\frac{P(Z_k=r)}{r+1}$.

Donc $(r+1)P(Z_{k+1}=r)-(r+1)P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)$.

Ainsi $\begin{cases}(n+1)P(Z_{k+1}=n)=P(Z_k=n) & \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et}\\ (r+1)P(Z_{k+1}=r)-(r+1)P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r) & \text{pour tout } r \text{ dans } [\![0,n-1]\!]\end{cases}$

---

<u>Remarque</u>.. On peut en fait écrire le tout en un !

En effet $\forall k\in\mathbb{N}, \forall r\in[\![0,n]\!]$, $(r+1)P(Z_{k+1}=r)-(r+1)P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)$

car $P(Z_{k+1}=n+1)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

(Q3) • $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n) \underset{\substack{\uparrow \\ (R_1)}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) P(Z_{k+1} = n) = (n+1) \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = n) = (n+1)\left[S_n - \underbrace{P(Z_0 = n)}_{=1}\right]$.

$S_n = (n+1)[S_n - 1] = (n+1) S_n - (n+1)$ ; $n S_n = n+1$. $\underline{\underline{S_n = \frac{n+1}{n}}}$.

• Pour parler de $S_{n-1}$ supposons que $n \geqslant 2$ ...

$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n-1) \underset{\substack{\uparrow \\ R_2}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ n P(Z_{k+1} = n-1) - n P(Z_{k+1} = n) \right] \underset{\substack{\uparrow \\ S_{n-1} \text{ et } S_n \text{ existent...}}}{=} n \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n-1) - \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) \right]$

$S_{n-1} = n \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = n-1) - \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = n) \right] = n \left[ S_{n-1} - \underbrace{P(Z_0 = n-1)}_{=0} - S_n + \underbrace{P(Z_0 = n)}_{=1} \right]$

$S_{n-1} = n S_{n-1} - n S_n + n \underset{\substack{S_n = \frac{n+1}{n} \\ \downarrow}}{=} n S_{n-1} - (n+1) + n = n S_{n-1} - 1$.

Alors $S_{n-1} = \frac{1}{n-1}$.

• Ici encore nous supposons que $n \geqslant 2$.

Notons que si $n = 2$ la suite $(r S_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante car elle ne contient qu'un terme ! Supposons $n \geqslant 3$. Soit $r \in [\![1, \underline{\underline{n-2}}]\!]$.

$S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( (r+1) P(Z_{k+1} = r) - (r+1) P(Z_{k+1} = r+1) \right]$.

$S_r = (r+1) \sum_{k=1}^{+\infty} \left( P(Z_k = r) - P(Z_k = r+1) \right) \underset{\substack{\uparrow \\ S_r \text{ et } S_{r+1} \text{ existent.}}}{=} (r+1) \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = r) - \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = r+1) \right]$.

$S_r = (r+1) \left[ S_r - P(Z_0 = r) - S_{r+1} + P(Z_0 = r+1) \right] \underset{\substack{\uparrow \\ P(Z_0 = r) = P(Z_0 = r+1) = 0 \text{ car } r \neq n \text{ et } r+1 \neq n}}{=} (r+1)(S_r - S_{r+1})$.

$S_r = (r+1) S_r - (r+1) S_{r+1}$.

Alors $(r+1) S_{r+1} = r S_r$

$\forall r \in [\![1, n-2]\!]$, $(r+1) S_{r+1} = r S_r$ donc $(r S_r)_{1 \leq r \leq \underline{\underline{n-1}}}$ est constante.

Résumons le tout.

$$S_n = \frac{n+1}{n}.$$

Si $n \geq 2$ : $S_{n-1} = \frac{1}{n-1}$ et $(r S_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante.

Remarque.- Supposons $n \geq 2$.

$\forall r \in [\![1, n-1]\!]$, $r S_r = (n-1) S_{n-1} = 1$. $\forall r \in [\![1, n-1]\!]$, $S_r = \frac{1}{r}$.

Q4 Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r \underset{\uparrow}{=} \sum_{r=0}^{n} \left[(r+1) P(Z_{k+1} = r) - (r+1) P(Z_{k+1} = r+1)\right] x^r$$

$(R_k)$ qui vaut pour $r \in [\![0, n]\!]$
comme nous l'avons dit...

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} (r+1) P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=0}^{n \text{ ou } (n-1)} (r+1) P(Z_{k+1} = r+1)\, x^r.$$

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} (r+1) P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1}.$$

$$F_k(x) = \sum_{r=0 \text{ ou } 1}^{n} r P(Z_{k+1} = r)\, x^r + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1}$$

$$F_k(x) = x \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1} + F_{k+1}(x) - F'_{k+1}(x) = x F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) - F'_{k+1}(x).$$

$$F_k(x) = (x-1) F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x).$$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_k(x) = (x-1) F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x).$

Remarques.- 1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_k \in \mathbb{R}_n[X]$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_k = g(F_{k+1})$ ou $F_{k+1} = f(F_k)$ (car $f = g^{-1}$).

Q5 Soit $k \in \mathbb{N}$
a) $\forall$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, r\, x^{r-1}$ et $F''_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, r(r-1)\, x^{r-2}$.

donc $F'_k(1) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) \times r = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, r(r-1) \underset{\uparrow}{=} E(Z_k(Z_k - 1))$

théorème de transfert.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k-1))$.

Remarque. $\forall k \in \mathbb{N}, F_k(1) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) = 1$. $\forall k \in \mathbb{N}, \; F_k(1) = 1$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $F_k$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $F_k$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x)$ donc $2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''_{k+1}(x) + F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) + F''_{k+1}(x) = F''_k(x)$ donc $3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)$ et $3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)$.

c) $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{3}$).

$\forall k \in \mathbb{N}, \; F'_k(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k F'_0(1)$ et $F''_k(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k F''_0(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \; F_0(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)x^r = x^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; F'_0(x) = n x^{n-1}$ et $F''_0(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

Alors $F'_0(1) = n$ et $F''_0(1) = n(n-1)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F'_k(1) = \frac{n}{2^k}$ et $F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \; E(Z_k) = \frac{n}{2^k}$ et $E(Z_k(Z_k-1)) = \frac{n(n-1)}{3^k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \; V(Z_k) = E(Z_k(Z_k-1)) + E(Z_k) - (E(Z_k))^2 = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \; V(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}$.

## PARTIE III : Loi de chacune de ces variables aléatoires

(Q1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $g(F_{k+1}) = F_k$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_{k+1} = g^{-1}(g(F_{k+1})) = g^{-1}(F_k) = f(F_k)$.

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k+1} = f(F_k).}$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_k = f^k(F_0)$.

- C'est clair pour $k=0$ car $f^0 = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$.
- Supposons la propriété vraie pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$F_{k+1} = f(F_k) = f(f^k(F_0)) = f^{k+1}(F_0)$. Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = f^k(F_0).}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_0(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0=r)\, x^r \underset{\uparrow}{=} x^n = e_n(x)$. Donc $\underline{F_0 = e_n}$.

$P(Z_0=r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)\, x^r = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)\, e_r(x) = \left(\sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)\, e_r\right)(x)$.

Alors $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)\, e_r.}$

Ainsi $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)\, e_r = F_k = f^k(F_0) = f^k(e_n).}}$

(Q2)
- $\forall r \in [\![0,n]\!]$, $u_r = (X-1)^r \in \mathbb{R}_n[X]$
- $\forall r \in [\![0,n]\!]$, $\deg u_r = r$

$(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Alors $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Alors $\underline{\underline{(u_0, u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}}$

(Q3) Soit $r \in [\![0,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas.</u> $x \neq 1$ $\quad f(U_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_0^x (t-1)^r\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_0^x = \frac{1}{x-1}\times\frac{(x-1)^{r+1}}{r+1}.$

$$f(U_r)(x) = \frac{1}{r+1}(x-1)^r = \frac{1}{r+1}u_r(x).$$

<u>2e cas.</u> $x = 1$ $\quad f(U_r)(x) = U_r(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}.$

Or $\frac{1}{r+1}u_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } r=0 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$. Donc $f(U_r)(x) = \frac{1}{r+1}u_r(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(U_r)(x) = \frac{1}{r+1}u_r(x)$. Alors $\underline{\underline{f(U_r) = \frac{1}{r+1}u_r}}$ et $U_r \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de $f$ respectivement associés aux valeurs propres $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}$.

<u>Nous retrouvons ainsi le fait que $f$ est diagonalisable.</u>

(Q4) $e_n = X^n = (X-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(X-1)^r \times 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(X-1)^r = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r.$

$$\underline{\underline{e_n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r.}}$$

Soit $r \in [\![0,n]\!]$. $u_r = (X-1)^r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}X^j(-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}e_j.$

$$\underline{\underline{\forall r \in [\![0,n]\!],\ u_r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}e_j.}}$$

(Q5) $\forall r \in [\![0,n]\!]$, $f(u_r) = \frac{1}{r+1}u_r$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall r \in [\![0,r]\!]$, $f^k(u_r) = \left(\frac{1}{r+1}\right)^k u_r$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(e_n) = f^k\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r\right) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^k(u_r) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{(r+1)^k}u_r$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r.}}$$

(Q6) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$F_k = f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{(r+1)^k} u_r = \sum_{r=0}^{n} \left[ \binom{n}{r} \frac{1}{(r+1)^k} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} e_j \right].$$

$$F_k = \sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \frac{1}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Or $F_k = \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j)\, e_j$ et $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Plus de doute $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j} \frac{1}{(r+1)^k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \dfrac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}$.

---

Remarque.. $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\forall r \in [\![j,n]\!]$, $\binom{n}{r}\binom{r}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{r-j}$ (calcul simple).

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(Z_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \dfrac{\binom{n-j}{r-j}}{(r+1)^k}$.

ou $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(Z_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^{r} \dfrac{\binom{n-j}{r}}{(r+j+1)^k}$.

(Q7) Application. a) Soit $j \in [\![0,n]\!]$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \left| \frac{(-1)^{r-j}\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right| = \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k}$$

si $r \geqslant j$ : $\dfrac{1}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{1}{(j+1)^k}$ et $\binom{n}{r}\binom{r}{j} \geqslant 0$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{1}{(j+1)^k} \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}.$$

Posons $M_{n,j} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $|P(Z_k = j)| \leqslant \dfrac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$.

---

Remarque..
$$M_{n,j} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{r-j} = \binom{n}{j} \sum_{r=0}^{n-j} \binom{n-j}{r} = 2^{n-j}\binom{n}{j}.$$

$M_{n,j} = 2^{n-j}\binom{n}{j}$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $|P(Z_k = j)| \leq \dfrac{\Pi_{n,j}}{(j+1)^k}$ et $\left|\dfrac{1}{j+1}\right| < 1$.

Alors la série de terme général $\alpha_k = \dfrac{\Pi_{n,j}}{(j+1)^k}$ est convergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $|P(Z_k = j)|$ ou $P(Z_k = j)$ (!) est convergente.

Ainsi pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Alors $|P(Z_k = 0) - 1| = \left|\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \dfrac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right| \leq \sum_{r=1}^{n} \left|(-1)^r \dfrac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right| = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \leq \dfrac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}$

$$|P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \leq \frac{1}{2^k} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \frac{2^n}{2^k}.$$

Posons $C_n = 2^n$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $|P(Z_k = 0) - 1| \leq \dfrac{C_n}{2^k}$.

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{C_n}{2^k} = 0$. Alors, par encadrement, il vient $\lim_{k \to +\infty} P(Z_k = 0) = 1$.

Incroyable, non !!

Il est alors clair que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ est divergente.

Remarque.- La suite $(\{Z_k = 0\})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante car $\forall k \in \mathbb{N}$, $\{Z_k = 0\} \subset \{Z_{k+1} = 0\}$.

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Z_k = 0\}\right) = \lim_{k \to +\infty} P(Z_k = 0) = 1$

L'événement $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Z_k = 0\}$ est presque sûr.

Presque sûrement on tirera dans l'urne $U_0$ irrésistiblement pour le restant de ses jours !