EXERCICE 1

Q1 Soit u un élément non nul de E. φ_u est clairement une application de E dans E. Montrons que φ_u est linéaire.

$\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda\in\mathbb{R}, \varphi_u(\lambda x+y) = 2\dfrac{\langle \lambda x+y,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \lambda x - y = 2\dfrac{\lambda\langle x,u\rangle+\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - \lambda x - y$

$\forall (x,y)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \varphi_u(\lambda x+y) = \lambda\left(\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - x\right) + \dfrac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - y = \lambda\varphi_u(x)+\varphi_u(y)$.

Donc φ_u est un endomorphisme de E. Montrons que φ_u est involutif.

Soit $x\in E$. $\langle\varphi_u(x),u\rangle = \langle 2\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x, u\rangle = 2\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle - \langle x,u\rangle = \langle x,u\rangle$

Par conséquent :

$\varphi_u(\varphi_u(x)) = 2\dfrac{\langle\varphi_u(x),u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \varphi_u(x) = 2\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \left(2\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x\right) = x$.

$\forall x\in E, (\varphi_u\circ\varphi_u)(x) = x$. $\varphi_u\circ\varphi_u = id_E$. <u>$\varphi_u$ est un endomorphisme involutif de E.</u>

Q2 Soit u un élément non nul de E. $\varphi_u(u) = 2\dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - u = u$

<u>$u\neq 0_E$ et $\varphi_u(u)=u$. u est un vecteur propre de φ_u associé à la valeur propre 1.</u>

Q3 u est un élément non nul de E. Soit $(x_1,x_2)\in E^2$.

$\langle\varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \langle 2\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x_1, 2\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x_2\rangle$

$\langle\varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 2\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}2\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle - 2\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,x_2\rangle - 2\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle x_1,u\rangle + \langle x_1,x_2\rangle$

Donc $\langle\varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 4\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} + \langle x_1,x_2\rangle = \langle x_1,x_2\rangle$

<u>$\forall (x_1,x_2)\in E^2, \quad \langle\varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle$.</u>

$\forall x\in E, \quad \|\varphi_u(x)\| = \sqrt{\langle\varphi_u(x),\varphi_u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$. <u>$\forall x\in E, \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.</u>

Q4) $u \in E$ et $u \neq 0_E$. a) Soit x un élément de E.

$$\varphi_u(x) = -x \iff 2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u = 0_E \underset{u\neq 0_E}{\iff} \langle x,u\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Vect}(u))^{\perp} \iff x \in \mathcal{D}_u^{\perp} = \mathcal{H}_u$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{H}_u$. Notons que $\mathcal{H}_u \neq \{0_E\}$ car $\dim \mathcal{H}_u = n-1 \geq 1$.

$\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) $E = \mathcal{D}_u \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_u$. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathcal{H}_u$ alors

1°.. $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base de E

2°.. les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de φ_u car $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{D}_u = \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E)$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de φ_u ; φ_u est diagonalisable.

c) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = 2\frac{\langle x, tu\rangle}{\langle tu, tu\rangle}tu - x = 2\frac{t^2}{t^2}\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x = \varphi_u(x)$.

$\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = \varphi_u(x)$. $\varphi_{tu} = \varphi_u$.

Remarque.. Ne nous cachons pas que φ_u est la symétrie orthogonale de base la droite $\mathcal{D}_u$.

Q5) ψ est la symétrie orthogonale de base Δ !

a) Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$.

$\psi(x) = \psi(y+z) = \psi(y) + \psi(z) = y - z = y + (-z)$.

$y \in \Delta$ et $-z \in \Delta^{\perp}$ donc $\psi(\psi(x)) = \psi(y + (-z)) = \psi(y) + \psi(-z) = y - (-z) = y + z = x$.

$\forall x \in E$, $\psi(\psi(x)) = x$. $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. ψ est involutif.

Soit $(x,x') \in E^2$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$ et $\exists!(y',z') \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x' = y'+z'$.

$\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle y-z, y'-z'\rangle = \langle y,y'\rangle - \langle z,y'\rangle - \langle y,z'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$

$\langle x,x'\rangle = \langle y+z, y'+z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle y,z'\rangle + \langle z,y'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$ — z et y' sont orthogonaux et y et z' aussi.

$\forall (x,x') \in E^2$, $\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle x,x'\rangle$. ψ conserve le produit scalaire.

b) Soit u un élément non nul de $\underline{\underline{\Delta}}$. $\Delta = Vect(u)$.

Montrons que : $\psi = \varphi_u$

Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^\perp$, $x = y+z$. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$, $y = \alpha u$. $x = \alpha u + z$.

$$\varphi_u(x) = 2\frac{\langle \alpha u + z, u\rangle}{\langle u,u\rangle} u - (\alpha u + z) = 2 \underbrace{\frac{\alpha\langle u,u\rangle + \langle z,u\rangle}{\langle u,u\rangle}}_{=\alpha \text{ car } \langle z,u\rangle = 0} u - \alpha u - z = 2\alpha u - \alpha u - z = \alpha u - z$$

$\varphi_u(x) = \alpha u - z = y - z = \psi(y) + \psi(z) - \psi(y+z) = \psi(x)$.

$\forall x \in E$, $\varphi_u(x) = \psi(x)$. $\varphi_u = \psi$.

$\underline{\underline{\exists u \in \Delta - \{0_E\},\ \psi = \varphi_u.}}$

c) Supposons que $\mathcal{M} = (m_{ij})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k, \sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell j} e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} m_{ki} m_{\ell j} \underbrace{\langle e_k, e_\ell\rangle}$$

donc

$$\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj} = a_{ij}$$

$\underline{\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle.}}$

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. $\underline{\underline{{}^t\mathcal{M}\,\mathcal{M} = I_n.}}$

<u>Exercice</u>.. Montrer que si la matrice $\hat{\mathcal{M}}$, dans la base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un endomorphisme $\hat{\psi}$ de E vérifie ${}^t\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{M}} = I_n$ alors $\hat{\psi}$ conserve le produit scalaire et réciproquement.

ECRICOME 2000 Exercice 1

Q1 a) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

A est de type 0 si et seulement si ${}^tA = A^0 = I_m$; c'est à dire si et seulement si $A = I_m$.

A est de type 1 si et seulement si ${}^tA = A^1 = A$; c'est à dire si et seulement si A est symétrique.

$\boxed{I_m \text{ est la seule matrice de } \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ de type 0. Les matrices de type 1 sont les matrices symétriques}}$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. A est de type -1 si et seulement si ${}^tA = A^{-1}$; c'est à dire si et seulement si ${}^tAA = I_m$. Les matrices de types -1 sont donc les matrices orthogonales.

En se souvenant que la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice orthogonale il n'est pas difficile d'exhiber des matrices de type -1.

Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de type -1 (et même de type 1 ! !) sans être diagonale !

Q2 Soit x un nombre réel.

a) Montrons par récurrence que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$: $\big[N(x)\big]^k = N(k\,x)$.

L'égalité est claire pour $k = 1$.

Supposons que $\big[N(x)\big]^k = N(k\,x)$ pour un élément k de $\mathbb{N}^*$. Montrons alors que $\big[N(x)\big]^{k+1} = N((k+1)\,x)$.

$\big[N(x)\big]^{k+1} = \big[N(x)\big]^k \times N(x) = N(k\,x) \times N(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx) & -\sin(kx) \\ 0 & \sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

Ainsi : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx)\cos x - \sin(kx)\sin x & -\cos(kx)\sin x - \sin(kx)\cos x \\ 0 & \sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x & -\sin(kx)\sin x + \cos(kx)\cos x \end{pmatrix}$

Ce qui donne : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx+x) & -\sin(kx+x) \\ 0 & \sin(kx+x) & \cos(kx+x) \end{pmatrix} = N((k+1)x)$. Et ainsi s'achève la récurrence.

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big[N(x)\big]^k = N(kx)}$.

b) $N(x)$ est de type n si et seulement si : ${}^tN(x) = \big[N(x)\big]^n$. Rappelons alors que : $\big[N(x)\big]^n = N(nx)$.

Notons que : ${}^tN(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-x) & -\sin(-x) \\ 0 & \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = N(-x)$.

Alors : $N(x)$ de type $n \iff N(-x) = N(nx) \iff \cos(-x) = \cos(nx)$ et $\sin(-x) = \sin(nx)$.

Ainsi : $N(x)$ de type $n \iff -x \equiv nx\ [2\pi] \iff (n+1)x \equiv 0\ [2\pi] \iff x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n+1}\right]$

$\boxed{\text{L'ensemble des réels } x \text{ tel que } N(x) \text{ soit de type } n \text{ est : } \left\{ \frac{2k\pi}{n+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$

Q3 a) ${}^tA = A^n$ donne également $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^n) = ({}^tA)^n$.

Alors $A^{(n^2)} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = A$. $\boxed{A^{(n^2)} = A}$.

b) $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2+n} = A^{(n^2)}A^n = AA^n = A^{n+1} = B$. $\boxed{B^n = B}$.

Observons que $B = A^nA = {}^tAA$. Dès lors ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = B$ et $\boxed{B \text{ est symétrique}}$.

c) Posons $P = X^n - X$. P est un polynôme annulateur de B et ainsi toute valeur propre de B est un zéro de P.

B est une matrice réelle symétrique donc ses valeurs propres sont réelles.

Les zéros réels de $P = X^n - X$ sont 0 et 1 si n est impair, et 0, 1 et -1 si n est pair.

On peut alors affirmer que $\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } B \text{ sont} : -1,\ 0 \text{ et } 1}$.

d) Supposons que V soit un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. V n'est pas nul et $BV = -V$.

${}^tVBV = {}^tV(-V) = -{}^tVV = -\|V\|^2$. De plus : ${}^tVBV = {}^tV\,{}^tAAV = {}^t(AV)AV = \|AV\|^2$.

Ainsi : $-\|V\|^2 = \|AV\|^2$. Alors nécessairement $\|V\|^2 = 0$ et $V = 0$!

Par conséquent : $\boxed{-1 \text{ n'est pas valeur propre de } B}$.

e) Notons f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dont la matrice dans la base canonique est B. f_B est alors un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^m$ (n'oublions pas que la base canonique est orthonormale... pour le produit scalaire canonique). Montrons que f_B est une projection orthogonale.

Si 0 est la seule valeur propre de f_B, f_B est nécessairement l'application linéaire nulle car f_B est diagonalisable ; f_B est bien une projection orthogonale.

De même 1 est la seule valeur propre de f_B, f_B est nécessairement $Id_{\mathbb{R}^m}$ car f_B est diagonalisable ; f_B est toujours une projection orthogonale.

Supposons alors que 0 et 1 soient les deux valeurs propres de f_B.

Les deux sous-espaces propres associés $\operatorname{Ker} f_B$ et $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ sont supplémentaires (f_B est diagonalisable) et orthogonaux (f_B est symétrique). Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f_B$.

Soit U un élément de $\mathbb{R}^m$. $U = U_1 + U_2$ avec $(U_1, U_2) \in \operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m}) \times \operatorname{Ker} f_B$.

$f_B(U) = f_B(U_1) + f_B(U_2) = U_1 + 0 = U_1 = p(U)$. Ainsi $f_B = p$.

Dans tous les cas f_B est une projection orthogonale... donc f_B est un projecteur orthogonal.

$\boxed{B \text{ est une matrice de projecteur orthogonal}}$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Soit U un élément de E_B. $BU = 0$ donc ${}^tAAU = 0$. En particulier $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU\,{}^tAAU = 0$. Ceci donne alors $AU = 0$. Donc U est élément de E_A.

$\boxed{E_B \text{ est contenu dans } E_A}$.

Réciproquement soit U un élément de E_A ; $BU = {}^tAAU = {}^tA0 = 0$ et U appartient à E_B.

E_A est alors contenu dans E_B, ce qui achève de montrer que : $\boxed{E_B = E_A}$.

b) Soit V un élément de F_B. Il existe un élément U de $\mathbb{R}^m$ tel que : $f_B(U) = V$. Alors $V = f_A^{n+1}(U) = f_A(f_A^n(U))$ et ainsi V appartient à F_A.

On a donc $F_B \subset F_A$. De plus le théorème du rang et l'égalité $E_B = E_A$ donnent : $\dim F_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_A = \dim F_A$.

$F_B \subset F_A$ et $\dim F_B = \dim F_A$ permettent de dire que : $\boxed{F_B = F_A}$ (nous sommes en dimension finie...).

Nous avons vu plus haut que E_B et F_B sont deux supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^m$.

Ainsi : $\boxed{E_A \text{ et } F_A \text{ sont deux supplémentaires orthogonaux de } \mathbb{R}^m}$.

Q5 Soit U un élément de F_A. Comme $F_A = F_B = \operatorname{Im} f_B = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^m})$, $f_B(U) = U$ et donc $BU = U$.

Alors $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU\,{}^tAAU = {}^tUBU = {}^tUU = \|U\|^2$. Ainsi $\|AU\| = \|U\|$.

$\boxed{\forall U \in F_A,\ \|AU\| = \|U\|}$.

Q6 Supposons A inversible et toujours de type n. Alors $B = A^{n+1}$ est également inversible. f_B est alors un automorphisme de $\mathbb{R}^m$. Donc $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m}) = \operatorname{Im} f_B = \mathbb{R}^m$ et : $f_B = Id_{\mathbb{R}^m}$.

Alors $B = I_m$. ${}^tAA = I_m$. Ainsi ${}^tA = A^{-1}$ et $\boxed{A \text{ est de type -1}}$.

Q7 Supposons que A soit de type n et $n+1$.

${}^tAA = A^nA = A^{n+1} = {}^tA$. Or ${}^tAA$ est une matrice symétrique (voir plus haut), donc ${}^tA$ est une matrice symétrique et A également. De plus $AA = {}^tAA = {}^tA = A$. A est alors la matrice d'une projection. Comme $E_A = \operatorname{Ker} f_A$ et $F_A = \operatorname{Im} f_A$ sont orthogonaux, $\boxed{A \text{ est la matrice d'un projecteur orthogonal}}$.

ECRICOME 2005 Exercice 1

Remarque *Dans la suite si* A *est une matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*, nous noterons* $\mathrm{Sp}\, A$ *l'ensemble de ses valeurs propres et* SEP (A, λ) *le sous-espace propre de* A *associé à la valeur propre* λ *de* A.

Si α, β γ *sont trois réels nous noterons* Diag (α, β, γ) *la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Q1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si a, b et c sont trois réels quelconques, I , J, K sont trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne dépendent pas de a, b, c et $M(a, b, c) = a\, I + b\, J + c\, K$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } K^2 = I + J.$$

$$K^3 = K^2\, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\, K. \text{ Donc } K^3 - 2\, K = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

$$\boxed{J^2 = I} \quad \boxed{K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{K^2 = I + J} \quad \boxed{K^3 = 2\, K}.$$

$X^3 - 2\, X$ est un polynôme annulateur de K.

$X^3 - 2\, X$ est un polynôme annulateur de K et $X^3 - 2\, X = X\, (X^2 - 2) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

$X^3 - 2\, X$ est donc un polynôme annulateur de K dont les racines sont $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$. Ainsi :

les seules valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Q2. **Ici il faut sans doute comprendre que P doit être une matrice orthogonale.**

Remarque $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice inversible de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et* ${}^tPKP$ *est la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *mais* P^{-1} *n'est pas égale à* ${}^tP$ *!!*

K est une matrice symétrique et à coefficients réels donc K est diagonalisable. Mieux il existe une matrice orthogonale P, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que ${}^tPKP$ soit une matrice diagonale.

Il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et telle que $D = {}^tPKP$ soit une matrice diagonale.

Les valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Regardons si ces réels sont des valeurs propres de K.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $KX = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix}$.

$$KX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}.$$

Ainsi 0 est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit ε un élément de $\{-1, 1\}$. $KX = \varepsilon\sqrt{2}\, X \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\, x \\ x+z = \varepsilon\sqrt{2}\, y \\ y = \varepsilon\sqrt{2}\, z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\, x \\ \varepsilon\sqrt{2}\, x = \varepsilon\sqrt{2}\, z \\ x+z = (\varepsilon\sqrt{2})^2\, x \end{cases}.$

$$KX = \varepsilon\sqrt{2}\, X \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\, x \\ x = z \\ x+z = 2\, x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\, x \\ z = x \end{cases}.$$

Ainsi $\varepsilon\sqrt{2}$ est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement K possède trois valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $\|X_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $\|X_3\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Dès lors posons $Y_1 = \dfrac{1}{\|X_1\|}\, X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \dfrac{1}{\|X_2\|}\, X_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \dfrac{1}{\|X_3\|}\, X_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Alors (Y_1) est une base orthonormée de SEP $\big(K, -\sqrt{2}\big)$, (Y_2) est une base orthonormée de SEP $(K, 0)$ et (Y_3) est une base orthonormée de SEP $\big(K, \sqrt{2}\big)$.

K est une matrice symétrique à coefficients réels dont les valeurs propres sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Ainsi SEP $\big(K, -\sqrt{2}\big)$, SEP $(K, 0)$ et SEP $\big(K, \sqrt{2}\big)$ sont trois sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) =$ SEP $\big(K, -\sqrt{2}\big) \oplus$ SEP $(K, 0) \oplus$ SEP $\big(K, \sqrt{2}\big)$ (K est diagonalisable).

Alors $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ contituée de vecteurs propres de K respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Notons alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2. P est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ; ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

3. ${}^tPKP = P^{-1}KP = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$.

Si $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Alors P est une matrice inversible d'inverse ${}^tP$, $D = {}^tPKP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ et $-\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}$!

Q3. Soient a, b et c trois réels. $M = M(a,b,c) = a\,I + b\,J + c\,K = a\,I + b\,(K^2 - I) + c\,K = (a-b)\,I + c\,K + b\,K^2$.

$$\boxed{M = M(a,b,c) = (a-b)\,I + c\,K + b\,K^2.}$$

${}^tPMP = {}^tP\big((a-b)\,I + c\,K + b\,K^2\big)P = (a-b)\,{}^tPIP + c\,{}^tPKP + b\,{}^tPK^2P$.

${}^tPMP = (a-b)\,P^{-1}P + c\,P^{-1}KP + b\,P^{-1}K^2P = (a-b)\,I + c\,D + b\,(P^{-1}KP)^2 = (a-b)\,I + c\,D + b\,D^2$.

$${}^tPMP = (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^2.$$

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} a-b-c\sqrt{2}+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c\sqrt{2}+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si a, b et c sont trois réels et si $M = M(a,b,c)$ alors :

$$P^{-1}MP = {}^tPMP = (a-b)\,I + c\,D + b\,D^2 = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ou $P^{-1}MP = {}^tPMP = \mathrm{Diag}(a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2})$.

Soient a, b et c trois réels.

$M = M(a,b,c)$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2})$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,M = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2}) = \{a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2}\}$.

Si a, b, c sont trois réels, l'ensemble des valeurs popres de $M = M(a,b,c)$ est $\{a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2}\}$.

Soient a, b et c trois réels. Cherchons le nombre de valeurs propres distinctes de $M = M(a,b,c)$ ainsi que ses sous-espaces popres.

Posons $\lambda_1 = a+b-c\sqrt{2}$, $\lambda_2 = a-b$ et $\lambda_3 = a+b+c\sqrt{2}$.

Nous avons vu que $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\,M = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

$M = (a-b)\,I + c\,K + b\,K^2$ donc $M = Q(K)$ où Q est le polynôme $(a-b) + c\,X + b\,X^2$.

Rappelons que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de K respectivement associé aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Alors $K\,Y_1 = -\sqrt{2}\,Y_1$, $K\,Y_2 = 0 \times Y_2$ et $K\,Y_3 = \sqrt{2}\,Y_3$.

Le cours nous permet alors de dire que $M\,Y_1 = Q(K)\,Y_1 = Q(-\sqrt{2})\,Y_1$, $M\,Y_2 = Q(K)\,Y_2 = Q(0)\,Y_2$ et $M\,Y_3 = Q(K)\,Y_3 = Q(\sqrt{2})\,Y_3$.

Un calcul simple (en fait déjà fait) donne $Q(-\sqrt{2}) = \lambda_1$, $Q(0) = \lambda_2$ et $Q(\sqrt{2}) = \lambda_3$.

Ainsi (Y_1, Y_2, Y_3) est une base ortonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3.

• Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts, M admet trois valeurs propres deux à deux distinctes et les sous-espaces propres de M sont nécessairement des droites vectorielles.

Plus précisément : SEP $(M, \lambda_1) = \mathrm{Vect}(Y_1)$, SEP $(M, \lambda_2) = \mathrm{Vect}(Y_2)$ et SEP $(M, \lambda_3) = \mathrm{Vect}(Y_3)$.

• Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, M n'admet qu'une valeur propre et comme M est diagonalisable le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

• Supposons que deux des réels λ_1, λ_2, λ_3 soient égaux et que le troisième soit distinct des deux précédents.

Il existe trois éléments i, j k de $[\![1, 3]\!]$, deux à deux distinctes, et tels que $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$.

Comme M est diagonalisable, M possède deux sous-espaces propres dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.

(Y_i, Y_j) est une famille libre de SEP (M, λ_i) qui est alors de dimension au moins 2. Ce qui précède montre que SEP (M, λ_i) est de dimension 2. (Y_i, Y_j) est finalement une base de SEP (M, λ_i).

De plus SEP (M, λ_k) est nécessairement de dimension 1 et il est engendré par (Y_k).

Il ne reste plus qu'à examiner les conditions sur a, b et c qui donnent ses différents cas.

$\lambda_1 = \lambda_2 \Longleftrightarrow a + b - \sqrt{2}\, c = a - b \Longleftrightarrow 2\, b = \sqrt{2}\, c \Longleftrightarrow c = \sqrt{2}\, b.$

$\lambda_3 = \lambda_2 \Longleftrightarrow a + b + \sqrt{2}\, c = a - b \Longleftrightarrow -2\, b = \sqrt{2}\, c \Longleftrightarrow c = -\sqrt{2}\, b.$

$\lambda_1 = \lambda_3 \Longleftrightarrow a + b - \sqrt{2}\, c = a + b + \sqrt{2}\, c \Longleftrightarrow c = 0.$

Ainsi :

- $c = b = 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$;
- $c = 0$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_3 = a + b \neq \lambda_2 = a - b$;
- $c = \sqrt{2}\, b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = a - b \neq \lambda_3 = a + 3\, b$;
- $c = -\sqrt{2}\, b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_2 = \lambda_3 = a - b \neq \lambda_1 = a + 3\, b$;
- dans les autres cas λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts.

Il ne reste plus qu'à conclure en faisant la synthèse des résultats obtenus.

$$\boxed{\text{Si } b = c = 0,\ M = M(a, b, c) \text{ admet une seule valeur propre } a \text{ et SEP } (M, a) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } c = 0 \text{ et } b \neq 0,\ M = M(a, b, c) \text{ admet deux valeurs propres distinctes : } a + b \text{ et } a - b. \\ \text{Dans ce cas SEP } (M, a + b) = \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Big) \text{ et SEP } (M, a - b) = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Big). \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } c = \sqrt{2}\, b \text{ et } b \neq 0,\ M = M(a, b, c) \text{ admet deux valeurs propres distinctes : } a - b \text{ et } a + 3\, b. \\ \text{Dans ce cas SEP } (M, a - b) = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Big) \text{ et SEP } (M, a + 3\, b) = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Big). \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } c = -\sqrt{2}\, b \text{ et } b \neq 0,\ M = M(a, b, c) \text{ admet deux valeurs propres distinctes : } a - b \text{ et } a + 3\, b. \\ \text{Dans ce cas SEP } (M, a - b) = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Big) \text{ et SEP } (M, a + 3\, b) = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Big). \end{array}}$$

> Dans les autres cas $M = M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $a + b - \sqrt{2}\, c$, $a - b$ et $a + b + \sqrt{2}\, c$.
>
> De plus SEP $\big(M, a + b - \sqrt{2}\, c\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$, SEP $(M, a - b) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ et
>
> SEP $\big(M, a + b + \sqrt{2}\, c\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$.

4. Ici $a = 4$, $b = 2$ et $c = \sqrt{2}$.

Alors $M = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4 + 2 - \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 4$, $\lambda_2 = 4 - 2 = 2$ et $\lambda_3 = 4 + 2 + \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 8$.

M admet trois valeurs propres distinctes 4, 2 et 8. De plus :

SEP $(M, 4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$, SEP $(M, 2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ et SEP $(M, 8) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

Si $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tPMP = P^{-1}MP$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

L'énoncé est encore approximatif à ce niveau. Dans la suite (x, y, z) est implicitement un élément de $\mathbb{R}^3 - \{0_{R^3}\}$ et ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a. i. $\|X'\|^2 = {}^tX'X' = {}^t({}^tPX)\,{}^tPX = {}^tX\,{}^t({}^tP)\,{}^tPX = {}^tXP\,{}^tPX = {}^tXPP^{-1}X = {}^tXX = \|X\|^2$.

$$\boxed{\|X'\|^2 = \|X\|^2.}$$

$${}^tXMX = {}^tXPD\,{}^tPX = {}^t({}^tPX)D\,{}^tPX = {}^tX'DX' = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 4\,x' \\ 2\,y' \\ 8\,z' \end{pmatrix}.$$

Ainsi ${}^tXMX = 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2$. De plus $\|X\|^2 = \|X'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Alors

$$\boxed{f(x, y, z) = \frac{4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.}$$

a. ii. $2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leqslant 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 \leqslant 8\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ car x'^2, y'^2, z'^2 sont trois réels positifs.

Donc $2 \leqslant \dfrac{4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \leqslant 8$ et ainsi $2 \leqslant f(x, y, z) \leqslant 8$ puisque $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \|X\|^2 > 0$.

$f(x, y, z) = 2 \iff 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 = 2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \iff 2\,x'^2 + 6\,z'^2 = 0 \iff x' = z' = 0$.

$f(x, y, z) = 8 \iff 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 = 8\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \iff 4\,x'^2 + 6\,y'^2 = 0 \iff x' = y' = 0$.

Or $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\big(x - \sqrt{2}\,y + z\big) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(x - z\big) \\ z' = \dfrac{1}{2}\big(x + \sqrt{2}\,y + z\big) \end{cases}$.

Alors $f(x,y,z)=2 \iff \begin{cases} x-\sqrt{2}y+z=0 \\ x+\sqrt{2}\,y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=-x \end{cases} \iff (x,y,z)\in \text{Vect}\big((1,0,-1)\big)\big)$

Et $f(x,y,z)=8 \iff \begin{cases} x-\sqrt{2}\,y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=x \\ y=\dfrac{2\,x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,x \end{cases} \iff (x,y,z)\in \text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big)\big)$

Résumons. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{0_{R^3}\},\ 2\leqslant f(x,y,z)\leqslant 8.$

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{0_{R^3}\}, f(x,y,z)=2 \iff (x,y,z)\in \text{Vect}\big((1,0,-1)\big).$

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{0_{R^3}\}, f(x,y,z)=8 \iff (x,y,z)\in \text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big).$

Le minimum de f est 2 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}\big((1,0,-1)\big)-\{0_{R^3}\}$.
Le maximum de f est 8 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big)-\{0_{R^3}\}$.

Remarque Les fans de Rayleigh ne seront pas surpris par ces résultats...

b. i. Soit B une solution de l'équation. $BM=BB^2=B^3=B^2B=MB$.

B et M commutent.

Soit λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ.

$BMX=MBX$ donc $B(\lambda\,X)=MBX$ ou $MBX=\lambda\,BX$; ainsi BX appartient à E_λ.

Si λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ alors BX appartient à E_λ

Soit Y un vecteur propre de M. Notons γ la valeur propre associée. $Y\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $MY=\gamma\,Y$.

M ayant trois valeurs propres deux à deux distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Ainsi le sous-espace propre E_γ de M associé à la valeur propre γ est $\text{Vect}(Y)$.

Or $BY\in E_\gamma$ donc il existe un réel γ' tel que $BY=\gamma'\,Y$. Comme Y n'est pas nul, c'est un vecteur propre de B (associé à la valeur propre γ').

Les vecteurs propres de M sont des vecteurs propres de B.

Montrons que $\Delta={}^tPBP$ est une matrice diagonale. Notons (E_1,E_2,E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit j un élément de $[\![1,3]\!]$. PE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de P c'est donc Y_j. $PE_j=Y_j$ et $P^{-1}Y_j=E_j$.

De plus Y_j est un vecteur propre de M donc de B ; $\exists \alpha_j\in\mathbb{R}, BY_j=\alpha_j\,Y_j$.

Alors $\Delta E_j={}^tPBPE_j=P^{-1}BY_j=\alpha_j\,P^{-1}Y_j=\alpha_j\,E_j$.

Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de Δ est $\alpha_j\,E_j$ et ceci pour tout élément j de $[\![1,3]\!]$. Donc $\Delta=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0\\0&\alpha_2&0\\0&0&\alpha_3\end{pmatrix}$.

$\Delta={}^tPBP$ est une matrice diagonale.

b. ii. Oublions pudiquement le texte et résolvons l'équation.

Nous venons de voir que si B est solution de l'équation il existe une matrice diagonale Δ telle que
$\Delta={}^tPBP=P^{-1}BP$ ou telle que $B=P\Delta{}^tP=P\Delta P^{-1}$.

Ainsi les solutions de l'équation sont "de la forme" $P\Delta{}^tP=P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Considérons alors une matrice diagonale $\Delta = \text{Diag }(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et posons $B = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.

Alors $B^2 = M \iff (P\Delta P^{-1})^2 = M \iff P\Delta^2 P^{-1} = M \iff \Delta^2 = P^{-1}MP = \text{Diag}(4, 2, 8)$.

$$B^2 = M \iff \Delta^2 = \text{Diag}(4, 2, 8) \iff \text{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2) = \text{Diag}(4, 2, 8) \iff \begin{cases} \delta_1^2 = 4 \\ \delta_2^2 = 2 \\ \delta_3^2 = 8 \end{cases}.$$

$$B^2 = M \iff \begin{cases} \delta_1 = 2 \text{ ou } \delta_1 = 2 \\ \delta_2 = \sqrt{2} \text{ ou } \delta_2 = -\sqrt{2} \\ \delta_3 = 2\sqrt{2} \text{ ou } \delta_3 = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^2 = M(4, 2, \sqrt{2})$ est :

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\,\varepsilon'' \end{pmatrix} {}^tP \,;\, (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

Ou encore :

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & \varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' \\ 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & 2\,\varepsilon + 2\sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon \\ \varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & \varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' \end{pmatrix} \,;\, (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

Il n'échappera alors à personne que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{l'ensemble des solutions de l'équation } B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } B^2 = M(4, 2, \sqrt{2}) \text{ est :} \\ \left\{ M \left(\dfrac{\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon''}{2}, \dfrac{\varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon''}{2}, \dfrac{2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon}{2} \right) \,;\, (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}. \end{array}}$$

$\boxed{\text{ECRICOME 2006 Exercice 1}}$

Partie I : Quelques propriétés de f*.

1. Soit M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

MX et ${}^tMY$ sont les matrices de $f(x)$ et de $f^\star(y)$ dans la base othonormée $\mathcal{B}$.

Alors $< f(x), y >= {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY =< x, f^\star(y) >$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, f^\star(y) >.}$$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, g(y) >$.

Montrons que $g = f^\star$.

$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) >=< f(x), y >=< x, f^\star(y) >$.

Alors $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) >=< x, f^\star(y) >$ ou $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Ainsi si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}^3, < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Donc si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : g(y) - f^\star(y)$ appartient à $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp$.

Or $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par conséquent $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ g(y) - f^\star(y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ g(y) = f^\star(y)$.

Finalement $g = f^\star$.

$$\boxed{f^\star \text{ est le seul endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, g(y) >.}$$

3. a. Soit x un élément de F et soit y un élément de $F^\perp$. $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >$.

Or $f(x)$ appartient à F car x appartient à F qui est stable par f et y appartient à $F^\perp$ donc $< f(x), y >= 0$.

Alors $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >= 0$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est dans } F \text{ et } y \text{ dans } F^\perp \text{ alors } < x, f^\star(y) >= 0.}$$

b. Soit y un élément de $F^\perp$. Ce qui précède montre que $\forall x \in F,\ < x, f^\star(y) >= 0$ donc que $f^\star(y) \in F^\perp$.

Ainsi $\forall y \in F^\perp, f^\star(y) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par $f^\star$

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f \text{ alors } F^\perp \text{ est stable par } f^\star.}$$

▲ *Exercice* *E est un espace vectoriel euclidien. Généraliser tous les résultats précédents.*

f et g sont deux endomorphismes de E et λ un réel. Exprimer $(\lambda f + g)^\star$ et $(f \circ g)^\star$ en fonction de $f^\star$, $g^\star$ et λ. Déterminer $(f^\star)^\star$.

Que dire de $f^\star$ si f est un automorphisme de E ? ▼

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

1. • Par définition $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

• $\mathcal{E}$ n'est pas vide car $\mathbb{R}^3$ n'est pas vide !

• Soient g et h deux éléments de $\mathcal{E}$ et λ un réel.

Il existe deux éléments $u=(a,b,c)$ et $u'=(a',b',c')$ tels que $g=f_u$ et $h=f_{u'}$.

$\lambda\, g+h=\lambda\, f_u+f_{u'}$ donc la matrice de $\lambda\, g+h$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\lambda\, M_u+M_{u'}$.

Or $\lambda\, M_u+M_{u'}=\lambda\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & b' & c'\\ c' & a' & b'\\ b' & c' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\, a+a' & \lambda\, b+b' & \lambda\, c+c'\\ \lambda\, c+c' & \lambda\, a+a' & \lambda\, b+b'\\ \lambda\, b+b' & \lambda\, c+c' & \lambda\, a+a'\end{pmatrix}=M_{\lambda\, u+u'}$.

Ainsi $\lambda g+h$ et $f_{\lambda\, u+u'}$ ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\lambda g+h=f_{\lambda\, u+u'}$. Ce qui montre que $\lambda\, g+h$ appartient à $\mathcal{E}$.

Par conséquent $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (g,h)\in\mathcal{E}^2,\ \lambda\, g+h\in\mathcal{E}$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).}$$

2. Soit $u=(a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}$ est $M_u=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.

La matrice de $f^\star$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^tM_u=\begin{pmatrix} a & c & b\\ b & a & c\\ c & b & a\end{pmatrix}$.

La matrice de $f_u^\star$ dans $\mathcal{B}$ est donc $M_{\hat{u}}$ avec $\hat{u}=(a,c,b)$. Ainsi $f_u^\star=f_{\hat{u}}$.

Ce qui permet d'affirmer que $f_u^\star$ est un élément de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ f_u^\star \text{ appartient à } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice* *Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que deux éléments de $\mathcal{E}$ commutent.* ▼

3. a. Soit $u=(a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $f_u(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} a+b+c\\ c+a+b\\ b+c+a\end{pmatrix}$.

Cette matrice est encore $(a+b+c)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Ainsi $f_u(e_1)=(a+b+c)\, e_1$.

Comme e_1 n'est pas le vecteur nul, e_1 est un vecteur propre de f_u et ceci pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{e_1 \text{ est un vecteur propre commun aux éléments } f_u \text{ de } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice* *Soit $u=(a,b,c)$. M_u est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? (on pourra remarquer que $M_u=a\, I_3+b\, T+c\, T^2$...)* ▲

b. Soit $u=(a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$f_u(\mathcal{D})=f_u(\mathrm{Vect}(e_1))=\mathrm{Vect}\,(f_u(e_1))=\mathrm{Vect}\,((a+b+c)\, e_1)\subset\mathrm{Vect}(e_1)=\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ est donc stable par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D} \text{ est stable par } f_u.}$$

c. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Posons $v = (a, c, b)$.

Rappelons que $f_v^\star = f_{\hat{v}}$ avec $\hat{v} = (a, b, c)$ donc $f_v^\star = f_u$ d'après II 2).

f_v est un élément de $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{D}$ est stable par f_v d'après la question précédente.

La question **I 3. b.** montre alors que $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f_v^\star$ donc par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D}^\perp \text{ est stable par } f_u.}$$

d. Notons que $D = \text{Vect}(e_1) = \text{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\right) = \text{Vect}(i+j+k)$.

Notons également que $D^\perp$ est l'orthogonal d'une droite vectorielle donc est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}^\perp$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$x \in \mathcal{D}^\perp \iff < x, i+j+k >= 0 \iff x_1 \times 1 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ est une équation de } \mathcal{D}^\perp \text{ dans la base } \mathcal{B}.}$$

e. $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, i - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, j + 0\, k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = 0$ donc e_2 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, i + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, j - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\, k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0$ donc e_3 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ étant une base orthonormale : $\|e_2\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1$;

$\|e_3\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{6}} = 1$;

$< e_2, e_3 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{6}} + 0\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0.$

Finalement (e_2, e_3) est une famille orthonormale, donc une famille libre, de cardinal 2 du plan vectoriel $\mathcal{D}^\perp$. Ceci suffit pour dire que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$.

$e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, i + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, j + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, k$ donc $\|e_1\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1.$

Ainsi (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$.

(e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux. Ainsi $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathcal{D}^\perp \text{ et } \mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3.}$$

f. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{D} = \text{Vect}(e_1)$ et $\mathcal{D}^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par f_u.

Par conséquent $f_u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$, $f_u(e_2) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $f_u(e_3) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Alors il existe cinq réels e, f, g, h et ℓ tels que $f_u(e_1) = e\, e_1$, $f_u(e_2) = f\, e_2 + h\, e_3$ et $f_u(e_3) = g\, e_2 + \ell\, e_3$.

Alors la matrice N_u de f_u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

Si u est un élément de $\mathbb{R}^3$, il existe cinq réels e, f, g, h et ℓ tels que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ soit $N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

▲ *Exercice* *Si* $u = (a, b, c)$, *montrer que :* $N_u = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \dfrac{1}{2}(b+c) & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-b) & a - \dfrac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$. ▼

ECRICOME 2007 Exercice 2

1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $C = {}^tAB = (c_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}$. Alors $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}$.

$$\boxed{\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}.}$$

Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Notons que φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$\varphi(A, \lambda\, B + C) = \mathrm{Tr}\left({}^tA(\lambda\, B + C)\right) = \mathrm{Tr}\left(\lambda\, {}^tAB + {}^tAC\right) = \lambda\ \mathrm{Tr}({}^tAB) + \mathrm{Tr}({}^tAC) = \lambda\, \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$ car Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (A,B,C) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(A, \lambda\, B + C) = \lambda\, \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$.

Ainsi φ est linéaire à droite.

• Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa transposée ont même trace.

Ainsi $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tB\, {}^t({}^tA)\right) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \varphi(B,A)$.

$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \varphi(A,B) = \varphi(B,A)$. φ est symétrique.

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$. Ainsi $\varphi(A,A) \geqslant 0$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,A) \geqslant 0$. φ est positive.

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A,A) = 0$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$ et $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ki}^2 \geqslant 0$. Ainsi $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ki}^2 = 0$.

Alors $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ki} = 0$. Donc $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. φ est définie. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. a. ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tAA) = {}^tA\, {}^t({}^tA) = {}^tAA$. ${}^tAA$ est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels. Ainsi :

il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D$.

b. $({}^tAA)X = \lambda\, X$. En multipliant à gauche par ${}^tX$ on obtient ${}^tX({}^tAA)X = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, \|X\|^2$.

Ou ${}^tX{}^tAAX = \lambda\, \|X\|^2$. Soit encore ${}^t(AX)AX = \lambda\, \|X\|^2$. Finalement $\|AX\|^2 = \lambda\, \|X\|^2$.

X n'étant pas nul (X est un vecteur propre) sa norme ne l'est pas davantage et : $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$.

λ est donc un réel positif ou nul.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } {}^tAA,\ \lambda \geqslant 0.}$$

c. Montrons rapidement que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace.

Soit M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$.

Alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}\left(Q^{-1}(NQ)\right) = \text{Tr}\left((NQ)Q^{-1}\right)$ d'après le rappel proposé au début de l'exercice.

Ainsi $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(NQQ^{-1}) = \text{Tr}(N)$.

Notons alors que ${}^tAA$ et D sont semblables car $P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D$.

Ainsi $\left[N(A)\right]^2 = \varphi(A, A) = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(D)$.

De même (ou presque) B^tB et S sont semblables car $S = {}^tP(B^tB)P = P^{-1}(B^tB)P$. Donc $\text{Tr}(B^tB) = \text{Tr}(S)$.

Ainsi $\left[N(B)\right]^2 = \varphi(B, B) = \text{Tr}({}^tBB) = \text{Tr}(B^tB) = \text{Tr}(S)$.

$\text{Tr}(SD) = \text{Tr}\left(({}^tPB\,{}^tBP)({}^tP\,{}^tAAP)\right) = \text{Tr}({}^tPB\,{}^tBP\,{}^tP\,{}^tAAP) = \text{Tr}(P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP)$ car ${}^tP = P^{-1}$.

$P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP$ et $B\,{}^tB\,{}^tAA$ étant semblables il vient :

$\text{Tr}(SD) = \text{Tr}(P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP) = \text{Tr}(B\,{}^tB\,{}^tAA)$. Or $\text{Tr}(B\,{}^tB\,{}^tAA) = \text{Tr}({}^tB\,{}^tAAB)$.

Alors : $\text{Tr}(SD) = \text{Tr}({}^tB\,{}^tAAB) = \text{Tr}\left({}^t(AB)AB\right) = \varphi(AB, AB) = \left[N(AB)\right]^2$. Ou plus simplement (? !) :

$\left[N(AB)\right]^2 = \varphi(AB, AB) = \text{Tr}\left({}^t(AB)AB\right) = \text{Tr}({}^tB\,{}^tAAB) = \text{Tr}\left({}^tB\,PD\,{}^tPB\right) = \text{Tr}\left({}^tPB^tBPD\right) = \text{Tr}(SD)$. Finalement :

$$\boxed{\left[N(A)\right]^2 = \text{Tr}(D).} \quad \boxed{\left[N(B)\right]^2 = \text{Tr}(S).} \quad \boxed{\left[N(AB)\right]^2 = \text{Tr}(SD).}$$

d. Posons $U = SD = (u_{ij})$. $\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}\,d_{ki} = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}\,d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}\,\lambda_i$.

$$\boxed{\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii}.}$$

e. Ici i est un élément de $[\![1, n]\!]$.

$\|{}^tBPE_i\|^2 = {}^t\left({}^tBPE_i\right){}^tBPE_i = {}^tE_i{}^tP\,{}^t({}^tB){}^tBPE_i = {}^tE_i{}^tPB\,{}^tBPE_i = {}^tE_iSE_i$.

$$\boxed{{}^tE_iSE_i = \|{}^tBPE_i\|^2.}$$

Rappelons que SE_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de S. Ainsi $SE_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\,E_k$.

Notons $< ., . >$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et rappelons que $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est une base ortonormée de $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < ., . >\right)$.

Alors ${}^tE_iSE_i =< E_i, SE_i >=< E_i, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\,E_k >= s_{ii}$.

$$\boxed{{}^tE_iSE_i = s_{ii}.}$$

$s_{ii} = {}^tE_iSE_i = \|{}^tBPE_i\|^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{s_{ii} \geqslant 0.}$$

f. $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_{kk}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \sum_{k=1}^{n} s_{kk}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\, s_{ii} + \lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} s_{kk}\right).$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} s_{kk}\right).$$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ s_{kk} \geqslant 0$ donc $\displaystyle \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} s_{kk}\right) \geqslant 0.$

Ainsi $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii}.$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right).}$$

Donc $\displaystyle [N(AB)]^2 = \mathrm{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) = \mathrm{Tr}(D)\ \mathrm{Tr}(S) = [N(A)]^2\ [N(B)]^2.$

Alors : $[N(AB)]^2 \leqslant [N(A)]^2\ [N(B)]^2$.

Comme $N(AB)$, $N(A)$, $N(B)$ sont des réels positifs ou nuls il vient alors :

$$\boxed{N(AB) \leqslant N(A)\, N(B).}$$

ECRICOME 2008 Exercice 1

EXERCICE 1

Désolé mais je ne mettrai pas de flèches sur les vecteurs même sous la torture.

1. Soit v un élément de $\mathbb{R}^3$. Il existe un unique élément (v_1, v_2) de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$ tel que $v = v_1 + v_2$.

Par définition $p(v) = v_1$ et $q(v) = v_2$ donc $(p+q)(v) = p(v) + q(v) = v_1 + v_2 = v$.

$$\boxed{p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

2. (u) est une base orthonormée de $\mathcal{D}$. Le cours donne alors :

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^3,\ p(v) = < v, u > \ u.}$$

Notons que $< i, u >= a$, $< j, u >= b$ et $< k, u >= c$. Ainsi :

$$\boxed{p(i) = a\,u = a\,(a\,i + b\,j + c\,k),\ p(j) = b\,u = b\,(a\,i + b\,j + c\,k) \text{ et } p(k) = c\,u = c\,(a\,i + b\,j + c\,k).}$$

Alors : $P = M_{(i,j,k)}(p) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

$q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ donc $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.}$$

3. a. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2-a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix} = -Q.$

$$\boxed{M^2 = -Q.}$$

b. $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.

Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 3 - 1 = 2$.

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) \leqslant 2.}$$

$f \circ f = -q$ car $M^2 = -Q$. Ainsi $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im}(-q) = \operatorname{Im} q = \mathcal{D}^\perp$. Alors $\mathcal{D}^\perp = \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Ceci donne en particulier : $2 = \dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f^2 \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Alors $\operatorname{rg} f \geqslant 2$.

Finalement $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$.

Alors $\mathcal{D}^\perp \subset \operatorname{Im} f$ et $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f = 2$ donc $\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp$.

Dans ces conditions $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$. De plus u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$.

Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u) = \mathcal{D}$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp \text{ et } \operatorname{Ker} f = \mathcal{D}.}$$

c. $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ p(v) \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ f\big(p(v)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{f \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$

$f^2 = -q = p - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f^3 = f \circ p - f = -f$. Ainsi $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{X + X^3 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

d. L'ensemble des valeurs propres de f est contenu dans l'ensemble des zéros de $X + X^3$ dans $\mathbb{R}$ donc 0 est la seule valeur propre possible de f.

Or $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi f n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } f \text{ et } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. a Soient θ et θ' deux réels. $g_\theta \circ g_{\theta'} = (\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta\, f + (1-\cos\theta)\, f^2) \circ (\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta'\, f + (1-\cos\theta')\, f^2)$.

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin\theta' + \sin\theta)\, f + \big((1-\cos\theta') + \sin\theta\, \sin\theta' + (1-\cos\theta)\big)\, f^2 + \big(\sin\theta\, (1-\cos\theta')\sin\theta + (1-\cos\theta)\, \sin\theta'\big)\, f^3 + (1-\cos\theta)(1-\cos\theta')\, f^4$.

Notons que $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$. Il vient alors :

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta' + \sin\theta - \sin\theta\,(1-\cos\theta') - (1-\cos\theta)\,\sin\theta'\big)\, f + \big(1 - \cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta' + 1 - \cos\theta - (1-\cos\theta)(1-\cos\theta')\big)\, f^2 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta\,\cos\theta' + \cos\theta\,\sin\theta'\big)\, f + \big(1 - (\cos\theta\,\cos\theta' - \sin\theta\,\sin\theta')\big)\, f^2$.

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta+\theta')\, f + \big(1 - \cos(\theta+\theta')\big)\, f^2 = g_{\theta+\theta'}$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall \theta' \in \mathbb{R},\ g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}.}$$

b. Notons que $g_0 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Alors $g_\theta \circ g_{(-\theta)} = g_{\theta+(-\theta)} = g_0 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. De même $g_{(-\theta)} \circ g_\theta = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi :

$$\boxed{g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{(-\theta)}.}$$

ECRICOME 2009 Exercice 1

PARTIE I : Étude d'un cas particulier

1. $\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$

$\Phi_A(V_2) = AV_2 - V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -V_1 + V_4.$

$\Phi_A(V_3) = AV_3 - V_3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V_1 - V_4.$

$\Phi_A(V_4) = AV_4 - V_4A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = V_2 - V_3.$

La matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

T est une matrice symétrique d'ordre 4 à coefficients réels donc :

T est diagonalisable.

2. $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$$T^3 = T \times T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$$

$$\boxed{T^3 = 4\,T.}$$

$T^3 - 4T = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de T dont les zéros dans $\mathbb{R}$ sont 2, -2 et 0.

Par conséquent le spectre de T est **contenu** dans $\{2, -2, 0\}$.

L'ensemble des valeurs propres de T est **contenu** dans $\{2, -2, 0\}$. $\text{Sp}(T) \subset \{2, -2, 0\}$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$T\,X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ t = x \end{cases}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid y = z \text{ et } t = x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \text{Vect}(X_3, X_4)$.

D'abord X_3 n'est pas nul et $TX_3 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de T.

Ce qui précède montre aussi que le sous-espace propre associé, que nous noterons SEP $(T,0)$, est $\text{Vect}(X_3, X_4)$.

(X_3, X_4) est une famille génératrice de SEP $(T,0)$. Montrons que cette famille est libre.

Soient deux réels α et β tels que $\alpha\, X_3 + \beta\, X_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que (X_3, X_4) est une famille libre. C'est donc une base de SEP $(T,0)$.

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de } T \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base du sous-espace propre associé.}}$$

4. $T\,X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\,X_1.$

$T\,X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\,X_2.$

$$\boxed{TX_1 = 2X_1 \text{ et } TX_2 = -2X_2.}$$

5. Rappelons que 0 est valeur propre de T et que (X_3, X_4) est une base du sous-espace propre associé.

X_1 n'est pas nul et $T\,X_1 = 2\,X_1$ donc 2 est valeur propre de T et X_1 est un vecteur propre associé.

X_2 n'est pas nul et $T\,X_2 = -2\,X_2$ donc -2 est valeur propre de T et X_2 est un vecteur propre associé.

0, 2, et -2 sont des valeurs propres de T et nous avons vu que le spectre de T est contenu dans $\{2, -2, 0\}$.

Ainsi **les** valeurs propres de T sont 2, -2 et 0. $\text{Sp}(T) = \{2, -2, 0\}$.

$\dim \text{SEP}\ (T,2) \geqslant 1$, $\dim \text{SEP}\ (T,-2) \geqslant 1$, $\dim \text{SEP}\ (T,0) = 2$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de T est au plus 4, nécessairement $\dim \text{SEP}\ (T,2) = 1$ et $\dim \text{SEP}\ (T,-2) = 1$.

Notons que $\dim \text{SEP}\ (T,2) + \dim \text{SEP}\ (T,-2) + \dim \text{SEP}\ (T,0) = 4$; on retrouve le fait que T est diagonalisable.

(X_1) est une base de SEP $(T,2)$, (X_2) est une base de SEP $(T,-2)$ et (X_3, X_4) est une base de SEP $(T,0)$.

Comme $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est somme directe de ces trois sous-espaces propres, (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres 2, -2, 0, 0.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, X_3, X_4).

Ce qui précède indique que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est inversible et $P^{-1}TP = \text{Diag}(2, -2, 0, 0)$.

Notons que $D = \text{Diag}(2, -2, 0, 0)$ est une matrice diagonale telle que $T = PDP^{-1}$.

Si P est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors P est inversible et $T = PDP^{-1}$.

Exercice Montrer que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général.

1. • Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM - MA$ est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ_A est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de E et soit λ un réel.

$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda (AM - MA) + (AN - NA)$.

Donc $\Phi_A(\lambda M + N) = \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(M)$.

Ainsi Φ_A est linéaire.

$\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. $\forall (M, N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\langle M \mid N \rangle = \text{Tr}({}^tMN) \in \mathbb{R}$ (0).

• Soient M, N et P trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

$\langle M \mid \lambda N + P \rangle = \text{Tr}\left({}^tM(\lambda N + P)\right) = \text{Tr}(\lambda\, {}^tMN + {}^tMP) = \lambda\ \text{Tr}({}^tMN) + \text{Tr}({}^tMP) = \lambda \langle M \mid N \rangle + \langle M \mid P \rangle$.

$\forall (M, N, P) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle M \mid \lambda N + P \rangle = \lambda \langle M \mid N \rangle + \langle M \mid P \rangle$ (1).

• Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle N \mid M \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{i,j}\, m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j} = \langle M \mid N \rangle$.

$\forall (M, N) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2$, $\langle N \mid M \rangle = \langle M \mid N \rangle$ (2).

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle M \mid M \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M \mid M \rangle \geqslant 0$ (3).

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle M \mid M \rangle = 0$.

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = 0$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j}^2 \geqslant 0$. Ainsi $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j}^2 = 0$.

Alors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} = 0$. Donc M est la matrice nulle.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M \mid M \rangle = 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (4).

(0), (1), (2), (3), (4) suffisent pour dire que

$$\boxed{\text{l'application } (M,N)\in\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2 \to \langle M \,|\, N\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\langle \Phi_A(M)\,|\,N\rangle = \mathrm{Tr}\,\big({}^t\Phi_A(M)N\big) = \mathrm{Tr}\,\big({}^t(AM-MA)N\big) = \mathrm{Tr}\,\big(({}^t(AM)-{}^t(MA))N\big) = \mathrm{Tr}\,\big({}^t(AM)N - {}^t(MA)N\big)$.

$\langle \Phi_A(M)\,|\,N\rangle = \mathrm{Tr}\,\big({}^tM{}^tAN - {}^tA{}^tMN\big) = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}(A{}^tMN)$ car A est symétrique.

Notons que $\mathrm{Tr}(A{}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMNA)$.

Alors $\langle \Phi_A(M)\,|\,N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}({}^tMNA) = \mathrm{Tr}\,\big({}^tMAN - {}^tMNA\big) = \mathrm{Tr}\,\big({}^tM(AN-NA)\big) =< M, \Phi_A(M) >$.

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } M,\, N \text{ appartenant à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a : } \langle \Phi_A(M)\,|\,N\rangle = \langle M\,|\,\Phi_A(N)\rangle.}$$

Alors Φ_A est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

4. (a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$M_{X,Y} = X{}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n) = (x_i\, y_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

X et Y sont des vecteurs propres de A. Ce sont donc des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi on peut trouver deux éléments i_0 et j_0 de $[\![1,n]\!]$ tels que : $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0}\, y_{j_0}$ n'est pas nul. $M_{X,Y}$ ayant un coefficient non nul, ce n'est pas la matrice nulle.

$$\boxed{M_{X,Y} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

$AY = \mu\, Y$ donc ${}^t(AY) = {}^t(\mu\, Y)$. Alors ${}^tY\,{}^tA = \mu\,{}^tY$. Comme A est symétrique on obtient :

$$\boxed{{}^tYA = \mu\,{}^tY.}$$

(b) $\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX{}^tY - X{}^tYA = (\lambda\, X)\,{}^tY - X\,(\mu\,{}^tY) = \lambda\, X{}^tY - \mu\, X{}^tY = (\lambda-\mu)\, M_{X,Y}$.

$$\boxed{\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda-\mu)\, M_{X,Y}.}$$

Comme $M_{X,Y}$ n'est pas la matrice nulle, $\lambda-\mu$ est une valeur propre de Φ_A et $M_{X,Y}$ en est un vecteur propre associé.

Ce qui précède montre que si λ et μ sont deux valeurs propres quelconques de A, alors $\lambda-\mu$ est une valeur propre de Φ_A. Comme $\Gamma = \Big\{\lambda-\mu\,,\ (\lambda,\mu)\in\big(\mathrm{Sp}\,A\big)^2\Big\}$, Γ est contenu dans le spectre de Φ_A.

$$\boxed{\Gamma \subset \mathrm{Sp}\,\Phi_A.}$$

5. (a) A est diagonalisable donc il existe une base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Comme pour tout vecteur propre Z de A, $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $MZ_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit U un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

$MU = M\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k\, MZ_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$

Ainsi : $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MU = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ ME_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Cela signifie encore que pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est nulle. Donc M est la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Si pour } \textbf{TOUT} \text{ vecteur propre } Z \text{ de } A,\ MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ alors } M \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

M est un vecteur propre de Φ_A donc M n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est alors impossible que : pour tout vecteur propre Z de A on ait $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe au moins un vecteur propre } Z_0 \text{ de } A \text{ tel que } MZ_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.}$$

(b) et (c) $\Phi_A(M) = \alpha\, M$ car M est un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

Ceci s'écrit encore : $AM - MA = \alpha\, M$.

Alors $\alpha\, MZ_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - MAZ_0$.

Or $AZ_0 = \mu\, Z_0$. Ainsi : $\alpha\, MZ_0 = AMZ_0 - M(\mu\, Z_0) = AMZ_0 - \mu\, MZ_0$. Donc $AMZ_0 = (\alpha + \mu)\, MZ_0$.

Comme MZ_0 n'est pas nul(le), $\alpha + \mu$ est une valeur propre de A et MZ_0 en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{MZ_0 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \alpha + \mu.}$$

Dès lors, posons : $\lambda = \alpha + \mu$. $\alpha = \lambda - \mu$ et, λ et μ sont deux valeurs propres de A. Par conséquent α est un élément de Γ.

Nous venons de montrer que toute valeur propre α de Φ_A appartient à Γ. Donc $\operatorname{Sp}\Phi_A \subset \Gamma$. Ceci et la question 4 permettent d'affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{Sp}\Phi_A = \Gamma = \left\{\lambda - \mu\,,\ (\lambda, \mu) \in \left(\operatorname{Sp} A\right)^2\right\}.}$$

ECRICOME 2013 Exercice 1

Nous supposerons dans cet exercice que k est supérieur ou égal à deux...

1. ${}^tB = {}^t\big({}^tAA\big) = {}^tA\,{}^t\big({}^tA\big) = {}^tAA = B$.

$$\boxed{{}^tB = B.\ B \text{ est une matrice symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $< BX, X >=< X, BX >= {}^tX(BX) = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < BX, X >= \|AX\|^2.}$$

2. B est une matrice symétrique à coefficients réels donc ses valeurs propres sont réelles.

Autrement dit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, B = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, B$.

Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BX = \lambda\, X$.

$\|AX\|^2 =< BX, X >=< \lambda\, X, X >= \lambda < X, X >= \lambda\, \|X\|^2$. Or $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ donc λ est positif ou nul.

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } B \text{ sont réelles et positives ou nulles.}}$$

3. Notons que $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ et que $B = {}^tAA = A^kA = A^{k+1}$. Alors :

$B^k = (A^{k+1})^k = (A^k)^{k+1} = ({}^tA)^{k+1} = {}^tA({}^tA)^k = {}^tAA = B$.

$$\boxed{B^k = B.}$$

$B^k - B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $X^k - X$ est un polynôme annulateur de B. Alors les valeurs propres de B, qui sont des réels positifs ou nul , appartiennent à l'ensemble des racines réelles positives ou nulles du polynôme $X^k - X$.

Or les racines réelles positives ou nulles du polynôme $X^k - X$ sont 0 et 1 ($k \geqslant 2$...).

Ainsi les valeurs propres de B sont des éléments de $\{0, 1\}$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } B \text{ sont 0 et 1.}}$$

4. B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc B est diagonalisable. Mieux, il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPBP = P^{-1}BP = D$. Notons que $B = PDP^{-1}$.

Posons $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. D est semblable à B donc $\mathrm{Sp}\, D = \mathrm{Sp}\, B$. Or $\mathrm{Sp}\, D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Ainsi, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, α_k vaut 0 ou 1. Donc, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_k^2 = \alpha_k$.

$D^2 = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2) = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D$. Alors $B^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$.

$$\boxed{B^2 = B.}$$

5. • Soit X un élément de $\mathrm{Ker}(B)$. $BX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc, d'après **Q1**, $\|AX\|^2 =< BX, X >=< 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, X >= 0$.

Alors $\|AX\| = 0$ donc $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent X appartient à $\mathrm{Ker}(A)$.

• Réciproquement soit X un élément de $\text{Ker}(A)$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $BX = {}^tAAX = {}^tA0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi X appartient à $\text{Ker}(B)$.

Finalement $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \in \text{Ker}(B) \Longleftrightarrow X \in \text{Ker}(A)$. Alors :

$$\boxed{\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A).}$$

Soit Y un élément de $\text{Im}(B)$. Il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = BX$.

$Y = BX = {}^tAAX = A^kAX = A^{k+1}X = A(A^kX)$ donc Y appartient à $\text{Im}(A)$.

Ainsi $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$. Montrons alors que ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Le concepteur s'autorise à parler de noyau et d'image d'une matrice, autorisons nous à utiliser le théorème du rang pour A et pour B.

$\dim \text{Ker}(B) = \dim \text{Ker}(A)$ car $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$. Alors $\dim \text{Im}(B) = n - \dim \text{Ker}(B) = n - \dim \text{Ker}(A) = \dim \text{Im}(A)$.

Nous avons donc $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ et $\dim \text{Im}(B) = \dim \text{Im}(A)$. Alors :

$$\boxed{\text{Im}(B) = \text{Im}(A).}$$

6. Soit X un élément de $\text{Im}(A)$. Alors X appartient à $\text{Im}(B)$. Par conséquent il existe un élément Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = BZ$.

Donc $BX = B^2Z = BZ = X$ (ce qui n'est pas un scoop... pour une matrice de projection).

Alors, d'après **Q1**, $\|AX\|^2 =< BX, X >=< X, X >= \|X\|^2$.

Comme $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont des réels positifs ou nuls : $\|AX\| = \|X\|$. Ainsi :

$$\boxed{\forall X \in \text{Im}\, A,\ \|AX\| = \|X\|.}$$

Les nostalgiques pourront regarder sur le même thème ECRICOME 2000 exercice 1.

Remarque Il est clair que ce qui précède ne vaut pas pour $k = 1$.

Supposons que $k = 1$. L'hypothèse $A^k = {}^tA$ devient $A = {}^tA$ ce qui signifie que la matrice A est symétrique.

On a alors $B = {}^tAA = A^2$ et, $B^2 = B$ équivaut à $A^4 = A^2$. Or A symétrique ne donne pas nécessairement $A^4 = A^2$!

Par exemple la matrice $2\,I_n$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais $(2\,I_n)^4$ n'est pas égal à $(2\,I_n)^2$.