Ecricome 1997 Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $id_{\mathcal{E}}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
Lorsque x et y sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, le produit scalaire de x par y s'écrit $\langle x, y\rangle$, et $\|x\|$ représente la norme de x.
Quand u est un vecteur *non nul* de $\mathcal{E}$, on définit l'application φ_u de $\mathcal{E}$ dans lui-même par :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u - x$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_{\mathcal{E}}$).

2. Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u, associé à une valeur propre que l'on précisera. $u \neq 0$

3. Établir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2 \qquad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

   En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

   a. Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

   b. φ_u est-il diagonalisable ?

   c. t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.

5. *Étude d'une réciproque*

   On suppose que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall y \in \Delta \qquad \psi(y) = y \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \Delta^{\perp} \qquad \psi(z) = -z$$

   a. Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.

   b. Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait :

$$\psi = \varphi_u$$

   c. Soit $\mathcal{M}$ la matrice de ψ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{E}$. Soit a_{ij} (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que :

$$a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle$$

   En déduire que :

$${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$$

   où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

Ecricome 2000 Exercice 1

m est un entier supérieur ou égal à 3. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^m$ à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. **Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.**

Si M est une matrice, on note ${}^tM$ sa transposée. On rappelle que pour deux matrices M et N, ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

Si M est une matrice carrée d'ordre m, on note respectivement E_M et F_M le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dont la matrice dans la base canonique est M.

$\mathbb{R}^m$ est muni de son produit scalaire canonique défini pour deux vecteurs X et Y par : $(X \mid Y) = {}^tX\,Y$.

La norme euclidienne d'un vecteur X, associée à ce produit scalaire, est notée $\|X\|$.

Soit n un entier supérieur ou égal à -1. On dit qu'une matrice A carrée d'ordre m est de type n si ${}^tA = A^n$.

1) a) Qu'est-ce qu'une matrice de type 0, de type 1 ?

b) Donner un exemple, sous forme de tableau, de matrice non diagonale de type -1.

On suppose désormais que n est strictement plus grand que 1.

2) Dans cette question seulement on suppose m = 3.

Soit x un nombre réel et N (x) la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier strictement positif k on a : $(N(x))^k = N(kx)$.

b) Déterminer alors les réels x tels que N (x) soit une matrice de type n.

On revient au cas général m quelconque et on considère maintenant une matrice A carrée d'ordre m et de type n.
On se propose d'établir quelques propriétés de A.

3) a) Etablir l'égalité $A^{(n^2)} = A$.

b) On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$ et que B est une matrice symétrique.

c) Que peut-on en déduire quant aux valeurs propres de B ?

d) Soit V un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. En calculant ${}^tV\,B\,V$ de deux manières différentes montrer que l'on aboutit à une contradiction et qu'ainsi -1 ne peut pas être valeur propre de B.

e) Montrer que B est une matrice de projecteur orthogonal.

4) a) Montrer que E_B est inclus dans E_A puis que $E_B = E_A$.

b) Montrer que $F_A = F_B$ et que E_A et F_A sont supplémentaires orthogonaux.

5) Soit U un vecteur de F_A. Montrer que $\|AU\| = \|U\|$.

6) Montrer que si A est inversible et de type n alors A est aussi de type -1.

7) Montrer que si A est à la fois de type n et de type n+1 alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

Ecricome 2005 Exercice 1

Ceci n'est pas l'énoncé original mais le texte est respecté.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Q1 Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c, telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$$

Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K.
Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

Q2 Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible (*JF* *remplacer inversible par* **orthogonale**), telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.

Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$ (où $d_{i,j}$ est le coefficient d'indices i, j de D.)

Q3 En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$. En déduire les valeurs propres de la matrice M.

Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

Q4 On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.

a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par : $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{({}^tX)MX}{\|X\|^2}$.

i. (x,y,z) est un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que : $f(x,y,z) = \dfrac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

b) On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe). Montrer que B et M commutent.
En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

Ecricome 2006 Exercice 1

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$\langle x \, , \, y \rangle = {}^tXY$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

1.1. Quelques propriétés de f^*.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x) \, , \, y \rangle = \langle x \, , \, f^*(y) \rangle.$$
2. Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x) \, , \, y \rangle = \langle x \, , \, g(y) \rangle.$$
3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).
   a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$ calculer $\langle x \, , \, f^*(y) \rangle$.
   b. En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

1.2. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.
3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.
   a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.
   b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.
   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .
   d. Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.
   e. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
   f. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme
$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & l \end{pmatrix}$$
   où e, f, g, h, l sont des réels.

FIN

Ecricome 2007 Exercice 2

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A,B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{ où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

   Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

   a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

   où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
   On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   b. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.
   En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

   c. On pose $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

   d. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

   e. On note E_i le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2,$$

   où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.
   Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de s_{ii} ?

   f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right)$$

   puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

FIN

Ecricome 2008 Exercice 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^{\perp}$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle . , . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?

2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a. Montrer que :
   $$M^2 = -Q.$$

   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

   d. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :
$$g_\theta = Id + (\sin\theta)f + (1 - \cos\theta)f^2$$
où $f^2 = f \circ f$.

   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

Ecricome 2009 Exercice 1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «trace de A», et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.
Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle M \mid N \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tM\ N\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de M (resp. N) situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Soit A une matrice symétrique, on considère

- l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de A,
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs de Φ_A,
- l'ensemble $\Gamma = \left\{\lambda - \mu, \quad (\lambda, \mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\right\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels A :

★ Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,

★ les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

PARTIE I : Etude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire la diagonalisabilité de T.

2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T ?

3. Déterminer une base de l'espace propre associée à 0 de la matrice T.

4. Calculer TX_1 et TX_2 où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$ (*on ne demande pas le calcul de* P^{-1}).

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Prouver que l'application $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \langle M \mid N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Etablir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle \Phi_A(M) \mid N \rangle = \langle M \mid \Phi_A(N) \rangle \, .$$
En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

4. Soient
   - $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,
   - $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On pose alors :
$$M_{X,Y} = X\, {}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
   (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$ puis que ${}^tY\, A = \mu {}^tY$.
   (b) Etablir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu) M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.
   (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
   Montrer alors que $M = 0$.
   En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
   On note μ la valeur propre associée à Z_0.
   (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ.
   (c) Conclure.

ECRICOME 2013 Exercice 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U ;
- $\ker(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in \mathrm{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.