EXERCICE 1

1) a. Posons : $\forall t \in]0,1],\ h(t) = 1 - \ln t$. h est continue sur $]0,1]$.

Soit ε un élément de $]0,1]$. Une intégration par parties simple donne (avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = 1 - \ln t$...) :

$$\int_\varepsilon^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = [t(1-\ln t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t\left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 1-\varepsilon\,(1-\ln\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 1\,\mathrm{d}t = 1-\varepsilon+\varepsilon\,\ln\varepsilon+1-\varepsilon = 2-2\varepsilon+\varepsilon\,\ln\varepsilon.$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\,\ln\varepsilon) = 0$ donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = 2$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 2}.$$

b. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ \ell(t) = \dfrac{1-\ln t}{2+t^2}\cdot$ ℓ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit t un élément de $]0,1]$. $2 \leqslant 2+t^2$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

Comme $1-\ln t$ est positif il vient : $0 \leqslant \ell(t) \leqslant \dfrac{1}{2}(1-\ln t)$. $\quad(*)$

$\forall t \in]0,1],\ \boxed{0 \leqslant}\ \ell(t) \leqslant \dfrac{1}{2}(1-\ln t)$ et $\displaystyle\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t$ existe donc $\displaystyle\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$ existe également.

De plus $\displaystyle\int_1^x (1-\ln t)\,\mathrm{d}t$ existe, pour tout réel x strictement positif car ℓ est continue sur $]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout réel } x \text{ strictement positif}}.$$

<u>*Remarque*</u> *En intégrant l'inégalité* $(*)$ *on obtient :* $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = 1$. *Nous en reparlerons...*

c. $\displaystyle\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

Ceci donne encore, grâce à Chasles, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue en } 0}.$$

d. ℓ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit L la primitive de ℓ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \ell(t)\,\mathrm{d}t = F(1) + L(x) - L(1) = F(1) + L(x)$.

L est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée ℓ est continue sur cet intervalle. Ainsi L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Comme $x \to F(1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, car c'est une fonction constante, on peut alors dire que :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}.$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = F(1) + L(x)$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = L'(x) = \ell(x) = \dfrac{1-\ln x}{2+x^2}$.

Le signe de F' sur $]0,+\infty[$ est celui de la fonction $x \to 1 - \ln x$.

Alors F est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } [0,e] \text{ et strictement décroissante sur } [e,+\infty[.}$$

2) a. Commençons par montrer que $[0,1]$ est stable par F.

Comme F est croissante sur $[0,1]$, $F([0,1]) \subset [F(0),F(1)] = [0,F(1)]$.

Or, comme nous l'avons remarqué plus haut, $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Alors $F([0,1]) \subset [0,F(1)] \subset [0,1]$. Ainsi $[0,1]$ est stable par F.

Pour plus de précautions, montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et appartient à $[0,1]$.

• u_0 valant 1, la propriété est vraie pour $n=0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

u_n est un élément de $[0,1]$ alors $u_{n+1} = F(u_n)$ est défini et appartient à $F([0,1])$. Comme $F([0,1]) \subset [0,1]$, u_{n+1} appartient à $[0,1]$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ est défini et appartient à } [0,1]}.$$

b. u_1 appartient à $[0,1]$ et $u_0 = 1$ donc $\boxed{u_0 \geqslant u_1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ car $u_0 \geqslant u_1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$u_n \geqslant u_{n+1}$. Mieux $1 \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$ et F est croissante sur $[0,1]$, donc $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant F(u_{n+1}) = u_{n+2}$. $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}.\ (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante.}}$$

c. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente}}.$$

3) a. g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.

$\forall x \in]0,1],\ g'(x) = F'(x) - 1 = \dfrac{1-\ln x}{2+x^2} - 1 = \dfrac{-1-\ln x - x^2}{2+x^2}\cdot$

Posons : $\forall x \in]0,1],\ \varphi(x) = -1 - \ln x - x^2$. φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1],\ \varphi'(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x$.

φ' est strictement négative sur $]0,1]$ donc φ est strictement décroissante sur $]0,1]$.

Notons que $\varphi(1) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

φ est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. φ définit une bijection de $]0,1]$ sur l'intervalle $[-2,+\infty[$. Comme 0 appartient à $[-2,+\infty[$, il existe un unique élément β appartenant à $]0,1]$ (et même à $]0,1[$) tel que $\varphi(\beta) = 0$.

Rappelons que $\forall x \in]0,1],\ g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2+x^2}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \beta \text{ de }]0,1] \text{ tel que } g'(\beta) = 0}.$$

φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ et nulle en β.

Alors φ est strictement positive (resp. négative) sur $]0,\beta[$ (resp. $]\beta,1]$).

De plus g' est du signe de φ sur $]0,1]$ et g est continue sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0,\beta] \text{ et strictement décroissante sur } [\beta,1]}.$$

b. g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\beta,1]$ donc g définit une bijection de $]\beta,1]$ sur l'intervalle $[g(1), \lim\limits_{x\to\beta^+} g(x)[= [g(1), g(\beta)[$.

$g(1) = F(1) - 1 \leqslant 0$. De plus g est strictement croissante sur $[0,\beta]$ et $g(0) = F(0) - 0 = 0$ donc $g(\beta) > 0$.

Ainsi 0 est élément de l'intervalle $[g(1), g(\beta)[$. Alors :

$$\boxed{\text{Il existe un unique élément } \alpha \text{ de }]\beta,1] \text{ tel que } g(\alpha) = 0}.$$

4) a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \alpha$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1 \geqslant \alpha$.

• Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$ on ait $u_n \geqslant \alpha$.

Alors $1 \geqslant u_n \geqslant \alpha \geqslant 0$. Comme F est croissante sur $[0,1]$ on a : $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant F(\alpha) = \alpha$ (en effet $F(\alpha) - \alpha = g(\alpha) = 0$). La propriété est vraie pour $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \alpha}$$

b. Notons γ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \geqslant u_n \geqslant \alpha$, γ est alors élément de $[\alpha, 1]$ donc de $]\beta, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n),\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ et F est continue en γ donc $F(\gamma) = \gamma$ ou $g(\gamma) = 0$.

γ est donc un élément de $]\beta, 1]$ tel que $g(\gamma) = 0$; d'après 3) b $\gamma = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}.$$

EXERCICE 2

1) Soit ω un élément de Ω.

• Supposons que $U(\omega) = 1$. Alors $X(\omega) \leqslant n$ et $Y_n(\omega) = x\,X(\omega) - y\,\big(n - X(\omega)\big)$ (il a vendu $X(\omega)$ unité(s) du produit et il lui en reste $n - X(\omega)$).

Par conséquent : $Y_n(\omega) = x\,X(\omega) - y\,\big(n - X(\omega)\big) = \Big(x\,X(\omega) - y\,\big(n - X(\omega)\big)\Big) \times 1 + nx\,(1-1)$.

$Y_n(\omega) = \Big(x\,X(\omega) - y\big(n - X(\omega)\big)\Big)\,U(\omega) + nx\,\big(1 - U(\omega)\big)$.

• Supposons que $U(\omega) = 0$. Alors $X(\omega) > n$ et $Y_n(\omega) = n\,x$ (il a vendu les n unités). Par conséquent :

$Y_n(\omega) = n\,x = \Big(x\,X(\omega) - y\,\big(n - X(\omega)\big)\Big) \times 0 + nx\,(1-0) = \Big(x\,\big(X(\omega) - y(n - X(\omega)\big)\Big)\,U(\omega) + nx\,\big(1 - U(\omega)\big)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \Big(x\,X(\omega) - y\,\big(n - X(\omega)\big)\Big)\,U(\omega) + nx\,\big(1 - U(\omega)\big)$.

$$\boxed{Y_n = \big(x\,X - (n - X)y\big)\,U + nx\,(1 - U).}$$

2) a. Soit ω un élément de Ω.

• Supposons que $X(\omega) \leqslant n$. Alors $X(\omega) \in [\![0, n]\!]$ et $U(\omega) = 1$ donc $(XU)(\omega) \in [\![0, n]\!]$.

• Supposons que $X(\omega) > n$. Alors $U(\omega) = 0$ donc $(XU)(\omega) = 0$; $(XU)(\omega) \in [\![0, n]\!]$.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } XU \text{ prend ses valeurs dans } [\![0, n]\!].}$$

b. $E(XU) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(XU = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(XU = k)$.

Or pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, $\{XU = k\} = \{X = k\}$. Alors :

$$\boxed{E(XU) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k)}$$

c. $Y_n = (x + y)\,XU - n(x + y)\,U + nx$.

La linéarité de l'espérance donne alors : $E(Y_n) = (x + y)\,E(XU) - n(x + y)\,E(U) + nx$.

$E(U) = P(U = 1) = P(X \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

Ainsi $E(Y_n) = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) - n(x+y)\sum_{k=0}^{n} P(X = k) + nx$. Une petite factorisation fournit alors :

$$\boxed{E(Y_n) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\,P(X=k) + nx.}$$

3) a. $E(Y_{n+1}) = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1 \text{ ou } n}(k-n-1)\,P(X=k) + (n+1)x$

$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-n-1)\,P(X=k) + (n+1)x - (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\,P(X=k) - nx.$

$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = -(x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k) + x.$ Finalement :

$$\boxed{E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = x - (x+y)\sum_{k=0}^{n}P(X=k).}$$

b. $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) \geqslant 0$. La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\right)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante et converge vers 1 (X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k) = 1$).

De plus x et y sont deux réels strictement positifs donc $\dfrac{x}{x+y} < 1$.

Il existe donc un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![r, +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y}$. Notons que r appartient à $\mathbb{N}^*$ car, par hypothèse, $P(X=0) < \dfrac{x}{x+y}\cdot$

Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k) < \frac{x}{x+y}\}$.

0 est élément de A (toujours l'hypothèse $P(X=0) < \frac{x}{x+y}$) et, d'après ce qui précède, A est contenu dans $[\![0, r-1]\!]$.

A est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc A possède un plus grand élément n_0.

n_0 appartient à A et n_0+1 n'appartient pas à A donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}P(X=k) < \frac{x}{x+y}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0+1}P(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y}\cdot$

Supposons qu'il existe un second élément m_0 de $\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m_0}P(X=k) < \frac{x}{x+y}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{m_0+1}P(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y}\cdot$

Alors m_0 est un élément de A et $\forall n \in [\![m_0+1, +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k) \geqslant \sum_{k=0}^{m_0+1}P(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y}$.

Donc m_0 est un élément de A et et tout élément de $\mathbb{N}$ strictement supérieur à m_0 n'est pas dans A ; m_0 est le plus grand élément de A. Alors $m_0 = n_0$. Dès lors :

$$\boxed{\text{Il existe un unique entier naturel } n_0 \text{ tel que : } \sum_{k=0}^{n_0}P(X=k) < \frac{x}{x+y} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_0+1}P(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y}\cdot}$$

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = x - (x+y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = (x+y)\left(\frac{x}{x+y} - \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\right)$.

Alors $\forall n \in [\![0, n_0]\!], E(Y_{n+1}) - E(Y_n) > 0$ et $\forall n \in [\![n_0+1, +\infty[\![, E(Y_{n+1}) - E(Y_n) \leqslant 0$.

Ainsi $\forall n \in [\![0, n_0]\!], E(Y_{n_0+1}) > E(Y_n)$ et $\forall n \in [\![n_0+1, +\infty[\![, E(Y_{n_0+1}) \geqslant E(Y_n)$.

$E(Y_{n_0+1})$ est donc le maximum de l'ensemble $\{E(Y_n); n \in \mathbb{N}\}$.

Ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

4) a. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $P(X=k+1) = \dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}\, e^{-a} = \dfrac{a}{k+1}\, \dfrac{a^k}{k!}\, e^{-a} = \dfrac{a}{k+1}\, P(X=k)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k+1) = \frac{a}{k+1}\, P(X=k).}$$

b. Observons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \dfrac{a}{k}\, P(X=k-1)$.

Notons aussi que l'hypothèse que $P(X=0) < \dfrac{x}{x+y}$ n'est pas nécessairement vérifiée ($P(X=0) = e^{-a}$).

```

Program EDHEC_2000S;

var k:integer;a,u,s,x,y,z:real;

begin
write('Donner a. a='); readln(a);
write('Donner x. x='); readln(x);
write('Donner y. y='); readln(y);

k:=0;
u:=exp(-a);s:=u;
z:=x/(x+y);

while (s<z) do
            begin
            k:=k+1;u:=a/k*u;s:=s+u;
            end;

if k=0 then writeln('La condition initiale n''est pas remplie.')
       else
writeln('La taille du stock qui maximise l''espérance de gain est : ',k);
end.
```

EXERCICE 3

1) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de X_1 (resp. X_2) strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mieux c'est l'unique densité strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ de X_1 (resp. X_2).

Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x^2+y^2) = f_1(x)\, f_2(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. Posons $t = \sqrt{\dfrac{x}{2}}\cdot$ $x = t^2 + t^2$ donc $g(x) = g(t^2+t^2) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{t^2+t^2}{2}} = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x}{2}}.}$$

2) a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f_1(x)\, f_2(y) = g(x^2+y^2)$.

En dérivant par rapport à x on obtient : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f_1'(x)\, f_2(y) = 2x\, g'(x^2+y^2)$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{2x\, g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)} = \dfrac{f_1'(x)\, f_2(y)}{f_1(x)\, f_2(y)} = \dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \frac{f_1'(x)}{x\, f_1(x)} = \frac{2\, g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}\cdot}$$

b. Soient x_1 et x_2 deux réels (distincts) non nuls.

$h(x_1) = \dfrac{f_1'(x_1)}{x_1\, f_1(x_1)} = \dfrac{2\, g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)} = \dfrac{2\, g'(x_2^2+x_1^2)}{g(x_2^2+x_1^2)} = \dfrac{f_1'(x_2)}{x_2\, f_1(x_2)} = h(x_2)$.

$$\boxed{\forall (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ h(x_1) = h(x_2).\ h \text{ est constante sur } \mathbb{R}^*.}$$

c. f_1 et $x \to e^{-\frac{ax^2}{2}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = f_1'(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} - ax\, f_1(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} = (f_1'(x) - ax\, f_1(x))\, e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{x\, f_1(x)} = a$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) = ax\, f_1(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) - ax\, f_1(x) = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ k'(x) = 0$.

Ainsi k' est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. k est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{k \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

Il existe alors deux réels K et K' tels que : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ k(x) = K$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ k(x) = K'$.

Par définition, k est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Alors $K = \lim\limits_{x \to 0^-} k(x) = k(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = K'$.

Donc $K = k(0) = K'$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = K$.

$$\boxed{k \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} = k(x) = K$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\frac{ax^2}{2}}$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } K \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\frac{ax^2}{2}}.}$$

d. f_1 est une densité de probabilité strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc K est strictement positif.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\, dt$ converge puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, dt$ converge. En particulier $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\, dt$ converge.

Supposons que a est positif ou nul. $\forall t \in [1, +\infty[,\ e^{\frac{at^2}{2}} \geqslant 1 = \dfrac{1}{t^0} \geqslant 0$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\, dt$ donne alors la convergence $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^0}\, dt$ ce que réprouve la morale Riemannienne.

$$\boxed{a \text{ est strictement négatif.}}$$

e. $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$. De plus f_1 est une densité de probabilité.

Alors : $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, dt = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\, dt = K\, \sqrt{2\pi}\, \sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\, dt$.

Or $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres 0 et σ_1.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\, dt = 1$. Il vient alors : $1 = K\, \sqrt{2\pi}\, \sigma_1 \times 1 = K\, \sqrt{2\pi}\, \sigma_1$.

Par conséquent $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$.

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi normale de paramètres 0 et } \sigma_1.}$$

3) De même on peut trouver un réel σ_2 strictement positif tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$ et ainsi X_2 suit une loi normale de paramètres 0 et σ_2.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)\, f_2(y) = g(x^2 + y^2)$. Ainsi $f_1(1)\, f_2(0) = g(1) = f_1(0)\, f_2(1)$.

Alors $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_1}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$.

Ce qui donne $e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$, puis $\dfrac{1}{2\sigma_1^2} = \dfrac{1}{2\sigma_2^2}$.

Enfin $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et : $\sigma_1 = \sigma_2$ car ces deux réels sont strictement positifs.

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent toutes les deux la même loi normale.}}$$

PROBLÈME

Partie 1 : étude des symétries de $\mathbb{R}^n$

1) a. Soit x un élément de F_1. $x = x + 0_{\mathbb{R}^n}$ avec x dans F_1 et $0_{\mathbb{R}^n}$ dans F_2 Alors $s(x) = x - 0_{\mathbb{R}^n} = x$.

$$\boxed{\forall x \in F_1,\ s(x) = x}$$

b. Ce qui précède montre que $F_1 \subset \mathrm{Ker}(s - Id)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(s - Id)$.

$\exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2$. $s(x) = x$ donc $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$. Alors $2\,x_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$. $x_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $x = x_1$ et x est un élément de F_1.

Ceci achève de prouver que $\mathrm{Ker}(s - Id) \subset F_1$. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(s - Id) = F_1}$$

2) a. Soit x un élément de F_2. $x = 0_{\mathbb{R}^n} + x$ avec $0_{\mathbb{R}^n}$ dans F_1 et x dans F_2 Alors $s(x) = 0_{\mathbb{R}^n} - x = -x$.

$$\boxed{\forall x \in F_2,\ s(x) = -x}$$

b. Ce qui précède montre que $F_2 \subset \mathrm{Ker}(s + Id)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

$\exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2$. $s(x) = -x$ donc $x_1 - x_2 = -x_1 - x_2$. Alors $2\,x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$. $x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $x = x_2$ et x est un élément de F_2.

Ceci achève de prouver que $\mathrm{Ker}(s + Id) \subset F_2$. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(s + Id) = F_2}$$

3) Soit p la dimension de F_1. F_2 est de dimension $n - p$.

Rappelons que F_1 et F_2 ne sont pas réduits au vecteur nul.

Soit $(e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F_1 et soit $(e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ une base de F_2.

Comme F_1 et F_2 sont supplémentaires, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Mieux $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s car les éléments de $\mathcal{B}'$ ne sont pas nuls,

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ s(e'_i) = e'_i$ et $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ s(e'_i) = -e'_i$.

$$\boxed{s \text{ est diagonalisable et a pour matrice dans } \mathcal{B}' : \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}}$$

<u>Remarque</u>

I_p (resp. I_{n-p}) est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$).

$O_{n-p,p}$ (resp. $O_{p,n-p}$) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$).

4) Réciproquement soit p un élément de $[\![1, n-1]\!]$ considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que A est la matrice d'une symétrie.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) = e_i$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_i) = -e_i$.

Posons $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

$(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^n$ comme sous-familles d'une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

$(e_1, \ldots, e_p)$ (resp. $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$) est alors une base de F_1 (resp. F_2).

Comme $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Notons également que F_1 et F_2 ne sont pas réduits au seul vecteur nul.

Considérons alors la symétrie vectorielle s par rapport à F_1 et parallèlement à F_2.

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ s(e_i) = e_i = f(e_i)$ et $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ s(e_i) = -e_i = f(e_i)$.

s et f sont alors deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent $f = s$. f est donc une symétrie.

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est un élément de } [\![1, n-1]\!], \text{ la matrice } \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est la matrice d'une symétrie.}}$$

Partie 2 : étude de deux exemples.

1) a. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$ et soit λ un réel.

$$s(u) = \lambda u \Longleftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -(1+3\lambda)x + 2y + 2z & = & 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z & = & 0 \\ 2x - y + (2-3\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ effectuées sur le système permettent de dire que :

$$s(u) = \lambda\,u \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(1-\lambda)(x+2y) & = & 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z & = & 0 \\ 3(\lambda-1)(y-z) & = & 0 \end{array}\right. .$$

• 1^{er} cas : $\lambda = 1$. $s(u) = u \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$.

1 est valeur propre de s et le sous-espace propre associé est le plan vectoriel d'équation $2x - y - z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. Notons que $(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3)$ est une base de ce plan.

• $2^{\text{ème}}$ cas : $\lambda \neq 1$.

$$s(u) = \lambda u \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2y \\ z = y \\ -4y + (2-3\lambda)y - y = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2y \\ z = y \\ -3(\lambda+1)y = 0 \end{array}\right. .$$

- $\lambda = -1$. $s(u) = -u \Longleftrightarrow x = -2y$ et $z = y$.

  -1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1 + e_2 + e_3)$

- $\lambda \neq -1$. $s(u) = \lambda\,u \Longleftrightarrow x = y = z = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^3}$. λ n'est pas valeur propre.

s possède deux valeurs propres 1 et -1.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan vectoriel de base $(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1+e_2+e_3)$.

b. La somme des dimensions des deux sous-espaces propres de s est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc s est diagonalisable.

Ainsi les deux sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ de s sont supplémentaires et non réduits au seul vecteur nul.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$. $\exists!(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - Id) \times \mathrm{Ker}(s + Id),\ x = x_1 + x_2$.

$s(x_1) = x_1$ et $s(x_2) = -x_2$ donc $s(x) = x_1 - x_2$.

s est donc la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

s est la symétrie par rapport au plan vectoriel de base (e_1+2e_2, e_2-e_3) parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1 + e_2 + e_3)$.

2) a. Soit x un élément de E.

$s\big(x+s(x)\big)=s(x)+s\big(s(x)\big)=s(x)+x=x+s(x)$; $x+s(x)\in \mathrm{Ker}(s-Id)$.

$s\big(x-s(x)\big)=s(x)-s\big(s(x)\big)=s(x)-x=-\big(x-s(x)\big)$; $x-s(x)\in \mathrm{Ker}(s+Id)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ x+s(x)\in \mathrm{Ker}(s-Id) \text{ et } x-s(x)\in \mathrm{Ker}(s+Id).}$$

b. • Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Posons : $x_1=\dfrac{1}{2}\Big(x+s(x)\Big)$ et $x_2=\dfrac{1}{2}\Big(x-s(x)\Big)$. $x=x_1+x_2$.

$x+s(x)\in \mathrm{Ker}(s-Id)$ et $x-s(x)\in \mathrm{Ker}(s+Id)$. Par conséquent : $x_1\in \mathrm{Ker}(s-Id)$ et $x_2\in \mathrm{Ker}(s+Id)$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \exists (x_1,x_2)\in \mathrm{Ker}(s-Id)\times \mathrm{Ker}(s+Id),\ x=x_1+x_2$. Alors $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(s-Id)+\mathrm{Ker}(s+Id)$.

• Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(s-Id)\cap \mathrm{Ker}(s+Id)$. $s(x)=x$ et $s(x)=-x$. $x=-x$ et x est alors nul.

$\mathrm{Ker}(s-Id)\cap \mathrm{Ker}(s+Id)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(s-Id) \text{ et } \mathrm{Ker}(s+Id) \text{ sont supplémentaires.}}$$

c. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. $\exists!(x_1,x_2)\in \mathrm{Ker}(s-Id)\times \mathrm{Ker}(s+Id),\ x=x_1+x_2$.

Alors $s(x_1)=x_1$ et $s(x_2)=-x_2$. Ce qui donne $s(x)=s(x_1)+s(x_2)=x_1-x_2$.

$$\boxed{s \text{ est la symétrie vectorielle par rapport à } \mathrm{Ker}(s-Id) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(s+Id).}$$

au moins si $\mathrm{Ker}(s-Id)$ et $\mathrm{Ker}(s+Id)$ ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$... pour être conforme au texte.

Partie 3

1) Nous avons vu plus haut que s est la symétrie vectorielle par rapport au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 parallèlement au sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

La matrice M de s dans la base canonique, qui est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, est symétrique. s est donc un endomorphisme symétrique. Ainsi ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux. Etant déjà supplémentaires l'un est l'orthogonal de l'autre. s est donc une symétrie orthogonale.

$$\boxed{M \text{ est la matrice d'une symétrie orthogonale.}}$$

2) a. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(s-Id)$ et soit y un élément de $\mathrm{Ker}(s+Id)$. $s(x)=x$ et $s(y)=-y$.

$<x,y>=<s(x),y>=<x,s(y)>=<x,-y>=-<x,y>$. Alors $2<x,y>=0$ et $<x,y>=0$.

$\forall (x,y)\in \mathrm{Ker}(s-Id)\times \mathrm{Ker}(s+Id),\ <x,y>=0$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(s-Id) \text{ et } \mathrm{Ker}(s+Id) \text{ sont orthogonaux.}}$$

s est une symétrie donc $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires. Ces deux sous-espaces sont donc supplémentaires et orthogonaux. Par conséquent l'un est l'orthogonal de l'autre.

$$\boxed{s \text{ est donc une symétrie orthogonale.}}$$

b. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. $\exists!(x_1, x_2) \in F \times F^\perp,\ x = x_1 + x_2$ et $\exists!(y_1, y_2) \in F \times F^\perp,\ y = y_1 + y_2$.

$< s(x), y >=< x_1 - x_2, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > - < x_2, y_1 > - < x_2, y_2 >$.

$< s(x), y >=< x_1, y_1 > - < x_2, y_2 >$ car x_1 (resp. x_2) et y_2 (resp. y_1) sont orthogonaux.

De même $< s(y), x >=< y_1, x_1 > - < y_2, x_2 >$.

$< s(x), y >=< x_1, y_1 > - < x_2, y_2 >=< y_1, x_1 > - < y_2, x_2 >=< s(y), x >=< x, s(y) >$.

$$\boxed{s \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

$$\boxed{\text{Si } s \text{ est une symétrie de } \mathbb{R}^n,\ s \text{ est une symétrie orthogonale si et seulement si } s \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

3) a. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. $\exists!(x_1, x_2) \in F \times F^\perp,\ x = x_1 + x_2$.

$s(x) = x_1 - x_2 = x_1 - (x - x_1) = 2x_1 - x = 2p(x) - x = (2p - Id)(x)$.

$$\boxed{s = 2p - Id}$$

b. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. $p(x)$ est un élément de F. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ la famille des coordonnées de $p(x)$ dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

$x - p(x)$ est un élément de $F^\perp$. Donc $x - p(x)$ est orthogonal à tous les éléments de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ 0 =< x - p(x), u_i >=< x, u_i > - < p(x), u_i >=< x, u_i > - < \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k, u_i >$.

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ 0 =< x, u_i > - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\ < u_k, u_i > =< x, u_i > -\alpha_i$ car $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille orthonormale.

$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i =< x, u_i >$. Alors $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < x, u_i >\ u_i$ et $s(x) = 2 \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < x, u_i >\ u_i - x$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2 \sum_{i=1}^{p} < x, u_i >\ u_i - x.}$$

4) a. Notons que F est un plan vectoriel et que $v_1 = 2e_1 + e_2$ est un élément de F.

Cherchons un élément non nul de F orthogonal à v_1. Soit $\omega = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ de $\mathbb{R}^3$.

ω est un élément de F orthogonal à v_1 si et seulement si $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $(*)$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 4x + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -\dfrac{5}{3}\, x \end{cases}.$

Ainsi $v_2 = 3e_1 - 6e_2 - 5e_3$ est un vecteur de F orthogonal à v_1.

$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ et $\|v_2\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{70}$.
Posons $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\big(2e_1 + e_2\big)$ et $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\,\big(3e_1 - 6e_2 - 5e_3\big)$.

Alors (u_1, u_2) est une famille orthonormale, donc libre, de deux vecteurs du plan vectoriel F. C'est donc une base orthonormale de F.

$$\boxed{(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\big(2e_1 + e_2\big), \frac{1}{\sqrt{70}}\,\big(3e_1 - 6e_2 - 5e_3\big)\right) \text{ est une base orthonormale de } F.}$$

b. Nous noterons encore s la symétrie orthogonale par rapport à F.

Soit $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

(u_1, u_2) est une base orthonormale de F, donc $s(u) = 2 < u, u_1 > \, u_1 + 2 < u, u_2 > \, u_2 - u$.

$s(u) = 2\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2x + y)\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2e_1 + e_2) + 2\,\dfrac{1}{\sqrt{70}}\,(3x - 6y - 5z)\,\dfrac{1}{\sqrt{70}}\,(3e_1 - 6e_2 - 5e_3) - x\,e_1 - y\,e_2 - z\,e_3$.

$s(u) = \dfrac{1}{35}\Big(14(2x + y)(2e_1 + e_2) + (3x - 6y - 5z)(3e_1 - 6e_2 - 5e_3) - 35x\,e_1 - 35y\,e_2 - 35z\,e_3\Big)$

$s(u) = \dfrac{1}{35}\Big[\big(28(2x + y) + 3(3x - 6y - 5z) - 35x\big)\,e_1 + \big(14(2x + y) - 6(3x - 6y - 5z) - 35y\big)\,e_2 + \big(-5(3x - 6y - 5z) - 35z\big)\,e_3\Big]$.

$s(u) = \dfrac{1}{35}\Big[(30x + 10y - 15z)\,e_1 + (10x + 15y + 30z)\,e_2 + (-15x + 30y - 10z)\,e_3\Big]$.

$s(u) = \dfrac{1}{7}\Big[(6x + 2y - 3z)\,e_1 + (2x + 3y + 6z)\,e_2 + (-3x + 6y - 2z)\,e_3\Big]$. Alors :

La matrice N, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport à F est :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$