

EXERCICE 1

1 a) $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((f - \lambda_1 id) - (f - \lambda_2 id) \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(f - \lambda_1 id - f + \lambda_2 id \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((\lambda_2 - \lambda_1) id \right) = id.$

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((f - \lambda_1 id) - (f - \lambda_2 id) \right) = id.$$

b) Montrons que \mathbb{C}^m est somme directe de $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et de $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

• Soit x un élément de $\text{Ker}(f - \lambda_1 id) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$. $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$.

Alors $(\lambda_2 - \lambda_1)x = \lambda_2 x - \lambda_1 x = f(x) - f(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$. Comme λ_1 et λ_2 sont distincts, $\lambda_2 - \lambda_1$ n'est pas nul et ainsi x est nul. Ceci achève de montrer que $\text{Ker}(f - \lambda_1 id) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 id) = \{0_{\mathbb{C}^m}\}$.

Ainsi $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ sont en somme directe.

• $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^m donc $\text{Ker}(f - \lambda_1 id) + \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ est contenu dans \mathbb{C}^m . Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de \mathbb{C}^m . $x = id(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((f - \lambda_1 id) - (f - \lambda_2 id) \right)(x)$.

Ainsi $x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (f - \lambda_2 id)(x) + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (f - \lambda_1 id)(x)$.

Posons $x_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (f - \lambda_2 id)(x)$ et $x_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (f - \lambda_1 id)(x)$. On a $x = x_1 + x_2$.

Montrons alors que $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

$$(f - \lambda_1 id)(x_1) = (f - \lambda_1 id) \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (f - \lambda_2 id)(x) \right) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id) \right)(x).$$

Donc $(f - \lambda_1 id)(x_1) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et ainsi $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1 id)$.

Observons que $\theta = (f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id) = f^2 - \lambda_2 f - \lambda_1 f + \lambda_1 \lambda_2 id = f^2 - \lambda_1 f - \lambda_2 f + \lambda_2 \lambda_1 id = (f - \lambda_2 id) \circ (f - \lambda_1 id)$. Par conséquent : $(f - \lambda_2 id) \circ (f - \lambda_1 id) = \theta$. Alors :

$$(f - \lambda_2 id)(x_2) = (f - \lambda_2 id) \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (f - \lambda_1 id)(x) \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((f - \lambda_2 id) \circ (f - \lambda_1 id) \right)(x).$$

Donc $(f - \lambda_2 id)(x_2) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et alors $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

Ainsi $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$. Donc $x \in \text{Ker}(f - \lambda_1 id) + \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

Ceci achève de montrer que $\mathbb{C}^m \subset \text{Ker}(f - \lambda_1 id) + \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

Par conséquent $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) + \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$. Comme $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ sont en somme directe :

$$\boxed{\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 id).}$$

c) $(f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id) = \theta$ donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est un polynôme annulateur de f dont les racines dans \mathbb{C} sont λ_1 et λ_2 . Ainsi λ_1 et λ_2 sont les seules valeurs propres possibles de f . Autrement dit : $\text{Sp } f \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Rappelons que λ_1 (resp. λ_2) est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ (resp. $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$) n'est pas réduit au vecteur nul. Envisageons alors trois cas.

Cas 1 : f est distinct de $\lambda_1 id$ et $\lambda_2 id$.

Si $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ est réduit au vecteur nul alors $\text{Ker}(f - \lambda_2 id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

Ainsi $f - \lambda_2 id = \theta$ donc $f = \lambda_2 id$ ce qui n'est pas.

Si $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ est réduit au vecteur nul alors $\text{Ker}(f - \lambda_1 id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$.

Ainsi $f - \lambda_1 id = \theta$ donc $f = \lambda_1 id$ ce qui n'est pas.

Donc $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ ne sont pas réduits au vecteur nul. Alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f . Mieux λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f .

Or $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$, donc f est diagonalisable.

Cas 2 : f coïncide avec $\lambda_1 id$. Alors f est diagonalisable et λ_1 est sa seule valeur propre.

Cas 3 : f coïncide avec $\lambda_2 id$. Alors f est diagonalisable et λ_2 est sa seule valeur propre.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est distinct de } \lambda_1 id \text{ et de } \lambda_2 id \text{ alors } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les (seules) valeurs propres de } f.}$$

$$\boxed{\text{Si } f = \lambda_1 id \text{ (resp. } f = \lambda_2 id) \text{ alors } \lambda_1 \text{ (resp. } \lambda_2) \text{ est la seule valeur propre de } f.}$$

2) $(iI)^2 = i^2 I = -I!!$

$$\boxed{A = iI \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^2 = -I.}$$

3 a) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^{2n+1} dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^{2n+1} est A .

Posons $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - iI)(A + iI) = A^2 - (iI)^2 = A^2 - i^2 I = A^2 + I = 0_{\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})}$ (car A et iI commutent...).

Ainsi $(f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id) = \theta$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Q1, appliquée pour $m = 2n + 1$, montre alors que f est diagonalisable.

A est alors diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

A est une matrice à coefficients réels donc A ne vaut ni iI ni $-iI$. Donc f n'est ni $\lambda_1 id$ ni $\lambda_2 id$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f . Alors i et $-i$ sont LES valeurs propres de A .

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et i et $-i$ sont ses valeurs propres.

b) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. $X \in E_i \iff AX = iX \iff \overline{AX} = \overline{iX} \iff \overline{A} \overline{X} = -i \overline{X}$.

Or A appartient à $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $X \in E_i \iff A \overline{X} = -i \overline{X} \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

Si X est un élément de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$: $X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

c) Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une base de E_i .

u_1, u_2, \dots, u_p sont des éléments de E_i donc d'après ce qui précède, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille d'éléments de E_{-i} . Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ un élément de \mathbb{C}^p tel que $\sum_{k=1}^p \alpha_k \overline{u_k} = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})} = \overline{0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}} = \overline{\sum_{k=1}^p \alpha_k \overline{u_k}} = \sum_{k=1}^p \overline{\alpha_k \overline{u_k}} = \sum_{k=1}^p \overline{\alpha_k} u_k$. Donc $\sum_{k=1}^p \overline{\alpha_k} u_k = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Comme la famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est libre : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\overline{\alpha_k} = 0$.

En conjuguant on obtient : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\alpha_k = 0$. Ceci achève de montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} .

Si (u_1, u_2, \dots, u_p) est une base de E_i alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} .

Soit p la dimension de E_i et soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une base de E_i .

$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} donc $\dim E_{-i} \geq p = \dim E_i$.

Bien évidemment on peut montrer de la même manière que $\dim E_i \geq \dim E_{-i}$ et ainsi obtenir l'égalité entre $\dim E_i$ et $\dim E_{-i}$.

Reprenons plutôt une base (u_1, u_2, \dots, u_p) de E_i et montrons que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une base de E_{-i} .

Il ne reste plus qu'à montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille génératrice de E_{-i} .

Soit u un élément de E_{-i} . \overline{u} appartient E_i car $\overline{\overline{u}} = u$ appartient à E_{-i} !

Donc il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de \mathbb{C}^p tel que $\overline{u} = \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k$.

En conjuguant on obtient $u = \overline{\overline{u}} = \sum_{k=1}^p \overline{\alpha_k} \overline{u_k}$.

Ainsi tout élément de E_{-i} est combinaison linéaire de la famille $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$.

Ceci achève de montrer que cette famille est une famille génératrice de E_{-i} .

Étant libre c'est une base de E_{-i} . Alors $\dim E_{-i} = p = \dim E_i$.

$$\boxed{\dim E_i = \dim E_{-i}.}$$

d) A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et i et $-i$ sont ses valeurs propres.

Ainsi $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i \oplus E_{-i}$. Alors $2n + 1 = \dim \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2 \dim E_i$.

$2n + 1$ n'étant pas un multiple de deux un léger doute nous envahit...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont le carré est } -I.}$$

EXERCICE 2

1 a) •• Posons $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

Montrons à l'aide d'une récurrence faible que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , u_n est défini et est un réel strictement positif.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car $u_1 = 1$.
- Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n - 1$ et montrons la pour n .

Pour tout élément j de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, u_j est défini et est un réel strictement positif.

Donc $u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$ est défini et est un réel strictement positif. Ceci achève la récurrence.

Ainsi en posant : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$, on définit une suite de réels strictement positifs.

- Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une seconde suite de réels strictement positifs telle que $v_1 = 1$ et $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $v_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_j$.

Montrons que cette suite coïncide avec la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Montrons pour ce faire, à l'aide d'une récurrence faible, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n$.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car $v_1 = 1 = u_1$.
- Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n - 1$ et montrons la pour n .

$\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $v_j = u_j$ donc $v_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_j = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j = u_n$. Ceci achève la récurrence.

On définit bien une unique suite $(u_n)_{n \geq 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) $u_2 = \frac{1}{2 \times 2 - 1} \sum_{j=1}^{2-1} u_j = \frac{1}{3} u_1 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{2 \times 3 - 1} \sum_{j=1}^{3-1} u_j = \frac{1}{5} (u_1 + u_2) = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}$.

$$u_2 = \frac{1}{3} \text{ et } u_3 = \frac{4}{15}.$$

2) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $u_j > 0$ donc : $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geq u_1 = 1$.

Alors : $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j \geq \frac{1}{2n-1}$. Mieux : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{2n-1}$ car $u_1 = 1 \geq \frac{1}{2n-1}$!

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 2n-1 \leq 2n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n-1} \leq u_n$.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2n} \leq u_n$ et la série de terme général $\frac{1}{2n}$ diverge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

Cette série étant à termes positifs et divergente, la suite de ses sommes partielles est donc croissante et divergente et tend alors vers $+\infty$.

La série de terme général u_n diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_j = +\infty$.

3 a) Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

$$(2n+1)u_{n+1} = \sum_{j=1}^n u_j = \sum_{j=1}^{n-1} u_j + u_n = (2n-1)u_n + u_n = 2nu_n. \text{ Donc } u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_n.$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_n.$$

b) $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2n}{2n+1}u_n - u_n = -\frac{1}{2n+1}u_n < 0$.

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$ car $u_2 - u_1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

c) $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ on a alors :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{2n}$ étant divergente et à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs permettent de dire que :

la série de terme général $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ diverge.

d) $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket$, $0 < u_{n+1} \leq u_n$ donc $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket$, $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln u_n - \ln u_{n+1} \geq 0$.

Ainsi la série de terme général $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est divergente et à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{u_j}{u_{j+1}}\right) = +\infty \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\ln(u_j) - \ln(u_{j+1})) = +\infty.$$

Ce qui donne encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_1 - \ln(u_{n+1})) = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_{n+1} - \ln 1) = -\infty$.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_{n+1} = -\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty.}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\ln u_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty$ donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$$

4 a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}$.

• $u_2 = \frac{1}{3}$ et pour $n = 2$, $\frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}} = \frac{16}{4 \times 2 \times \binom{4}{2}} = \frac{16}{8 \times 6} = \frac{1}{3}$. La propriété est donc vraie pour $n = 2$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ et montrons la pour $n + 1$.

$$u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}} = \frac{4^n n! n!}{2(2n+1)(2n)!} = \frac{4^n (n+1)! (n+1)!}{(n+1) 2(n+1) (2n+1) (2n)!}$$

$$u_{n+1} = \frac{4^n (n+1)! (n+1)!}{(n+1) (2n+2)!} = \frac{4^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{4(n+1) (2n+2)!} = \frac{4^{n+1}}{4(n+1) \binom{2(n+1)}{n+1}}$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}.}$$

b) $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $n u_n = \frac{n}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_j = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n-1} u_j = +\infty$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j \right) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (n u_n) = +\infty.}$$

$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{n u_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{n u_n} \right) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(4^n)}.$$

5) $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $\frac{4^n}{n \binom{2n}{n}} = 4u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n \binom{2n}{n}} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{4^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\binom{2n}{n}\right)}.$$

EXERCICE 3

Remarque Le texte utilise la dérivabilité de φ sur \mathbb{R} . φ n'est donc pas une densité quelconque de X et de Y . Rappelons (?) que $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est l'unique densité de X définie et continue sur \mathbb{R} et que cette application est dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi dans tout l'exercice nous supposons que φ est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) a) Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{T}, P) .

Notons que Z est une application de Ω dans \mathbb{R} . Il reste alors à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Soit x un réel. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \text{Sup}(X(\omega), Y(\omega)) \leq x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x \text{ et } Y(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$.

X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur (Ω, \mathcal{T}, P) donc $X^{-1}(]-\infty, x])$ et $Y^{-1}(]-\infty, x])$ sont deux éléments de la tribu \mathcal{T} qui est stable par intersection finie ou dénombrable.

Par conséquent $X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$ est encore un élément de \mathcal{T} .

Finalement $Z^{-1}(]-\infty, x])$ est un élément de \mathcal{T} et ceci pour tout réel x . Alors :

$Z = \text{Sup}(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{T}, P) .

Montrons que Z est une variable aléatoire à densité. Notons F sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(Z \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq x\}) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = \Phi(x)\Phi(x) = (\Phi(x))^2$ car X et Y sont indépendantes.

φ est une (la!) densité continue sur \mathbb{R} de X donc Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\Phi' = \varphi$.

Ainsi $F = \Phi^2$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ce qui suffit très largement pour dire que Z est une variable aléatoire à densité.

$Z = \text{Sup}(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{T}, P) .

b) De plus F' est une densité de Z . Notons que : $F' = (\Phi^2)' = 2\Phi'\Phi = 2\varphi\Phi$.

$f : x \rightarrow 2\varphi(x)\Phi(x)$ est une densité de $Z = \text{Sup}(X, Y)$.

2) a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ existe et vaut } \sqrt{2\pi}.}$$

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$.

ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , ψ est strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Ainsi ψ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Notons aussi que $u \rightarrow e^{-u^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

Alors le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées indique que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$ est de même nature que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\psi(t))^2} \psi'(t) dt$ et qu'en cas de convergence ces deux intégrales sont égales.

Observons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-(\psi(t))^2} \psi'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ et rappelons que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\psi(t))^2} \psi'(t) dt$ converge et vaut : $\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$. Par conséquent :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge et vaut } \sqrt{\pi}.}$$

c) et d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -x \varphi(x)$.

Remarquons que φ' est continue sur \mathbb{R} donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f(x) = 2x \varphi(x) \Phi(x) = -2 \varphi'(x) \Phi(x)$.

Soit A dans \mathbb{R} . φ et Φ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_0^A x f(x) dx = \left[-2 \varphi(x) \Phi(x) \right]_0^A - \int_0^A (-2 \varphi(x) \Phi'(x)) dx = -2 \varphi(A) \Phi(A) + 2 \varphi(0) \Phi(0) + 2 \int_0^A (\varphi(x))^2 dx.$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(x))^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2}.$$

$$\text{Alors } \int_0^A x f(x) dx = -2 \varphi(A) \Phi(A) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^A e^{-x^2} dx \text{ et ceci pour tout réel } A \quad (1).$$

En multipliant par -1 on obtient : $\int_A^0 x f(x) dx = 2 \varphi(A) \Phi(A) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_A^0 e^{-x^2} dx$ et ceci pour tout réel A (2).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge donc } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ et } \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt \text{ convergent.}$$

$$\text{Alors } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^A e^{-x^2} dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ et } \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_A^0 e^{-x^2} dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx.$$

Notons que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A) = 0$, $\lim_{A \rightarrow -\infty} \varphi(A) = 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \Phi(A) = 1$ et $\lim_{A \rightarrow -\infty} \Phi(A) = 0$, car $\forall A \in \mathbb{R}$, $\varphi(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}}$ et Φ est une fonction de répartition.

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} (-2\varphi(A)\Phi(A)) = 0$ et $\lim_{A \rightarrow -\infty} (2\varphi(A)\Phi(A)) = 0$.

Alors (1) donne $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Ce qui permet de dire que :

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

(2) donne $\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx \text{ converge et vaut } -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx.$$

$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge. Ainsi Z possède une espérance.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$E(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

$$Z \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

3) a) X et Z sont deux variables aléatoires réelles sur (Ω, \mathcal{T}, p) il en est donc de même pour X^2 et Z^2 .

Notons F_{X^2} (resp. F_{Z^2}) la fonction de répartition de X^2 (resp. Z^2).

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{X^2}(x) = F_{Z^2}(x) = 0$ car X^2 et Z^2 prennent leurs valeurs dans $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$ car X est une variable aléatoire à densité.

De même : $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Z^2}(x) = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x})$.

Rappelons que $F_Z = \Phi^2$ et que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Z^2}(x) = (\Phi(\sqrt{x}))^2 - (\Phi(-\sqrt{x}))^2 = (\Phi(\sqrt{x}))^2 - (1 - \Phi(\sqrt{x}))^2$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Z^2}(x) = (\Phi(\sqrt{x}))^2 - 1 + 2\Phi(\sqrt{x}) - (\Phi(\sqrt{x}))^2 = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$. Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$.

X^2 et Z^2 ont la même fonction de répartition donc :

X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) X suit la loi normale centrée réduite. Alors $E(X)$ existe et vaut 0 et $V(X)$ existe et vaut 1.

Ainsi $E(X^2)$ existe et vaut $V(X) + (E(X))^2$, c'est à dire 1.

Comme Z^2 a même loi que X^2 , Z^2 possède une espérance qui vaut 1 donc Z possède une variance.

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\pi}.$$

L'espérance de Z^2 existe et vaut 1. La variance de Z existe et vaut $1 - \frac{1}{\pi}$.

PROBLÈME

Partie 1 : étude de la variable aléatoire X_n .

1) A l'instant 0 le mobile est sur le point d'abscisse 0 donc à l'instant 1 le mobile se trouve sur le point d'abscisse 0 + 1 avec la probabilité $\frac{0+1}{0+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{0+2}$. Ainsi :

$$X_1(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

2) Montrons par récurrence que pour tout n dans \mathbb{N} , $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

- $X_0(\Omega) = \{0\}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n + 1$.

Si à l'instant n le mobile est sur le point d'abscisse k , avec k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, à l'instant $n + 1$ il se trouve sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.

Ainsi $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k + 1; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Par conséquent $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k; k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket\} = \{0, 1, \dots, n + 1\}$. Ceci achève la récurrence.

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

3) a) Soient n un élément de \mathbb{N}^* et k un élément de $\{1, \dots, n\}$.

Comme k est supérieur ou égal à 1, l'événement $\{X_n = k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1} = k - 1\}$.

Donc $\{X_n = k\} = \{X_{n-1} = k - 1\} \cap \{X_n = k\}$. Ainsi :

$$P(X_n = k) = P(\{X_{n-1} = k - 1\} \cap \{X_n = k\}) = P(X_{n-1} = k - 1) P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k).$$

$$\text{Donc } P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1) \frac{(k - 1) + 1}{(k - 1) + 2} = \frac{k}{k + 1} P(X_{n-1} = k - 1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X_n = k) = \frac{k}{k + 1} P(X_{n-1} = k - 1).$$

b) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{k + 1} u_{n-k}$.

- Posons $n = 0$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$; $k = 0$! $P(X_n = k) = P(X_0 = 0) = u_0 = \frac{1}{0 + 1} u_{0-0} = \frac{1}{k + 1} u_{n-k}$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

• Soit n dans \mathbb{N}^* . Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et montrons la pour n .

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Si $k = 0$: $P(X_n = k) = P(X_n = 0) = u_n = \frac{1}{0+1} u_{n-0} = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$.

Supposons k non nul. Alors n est dans \mathbb{N}^* et k dans $\{1, \dots, n\}$; ainsi $P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

$k-1$ est dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'hypothèse de récurrence donne alors : $P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{(k-1)+1} u_{(n-1)-(k-1)}$.

C'est à dire $P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{k} u_{n-k}$.

Donc $P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1) = \frac{k}{k+1} \frac{1}{k} u_{n-k} = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}.}$$

c) Soit n dans \mathbb{N} . $(\{X_k = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.

Alors $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} u_{n-k} = 1$. Le changement d'indice $j = n - k$ donne alors : $\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1.}$$

d) L'égalité précédente donne en faisant successivement $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$:

$$u_0 = 1, \frac{u_0}{2} + u_1 = 1, \frac{u_0}{3} + \frac{u_1}{2} + u_2 = 1 \text{ et } \frac{u_0}{4} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{2} + u_3 = 1.$$

Alors $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On retrouve $P(X_0 = 0) = u_0 = 1$ et $P(X_1 = 0) = u_1 = \frac{1}{2}$.

$$u_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1/2}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ et } u_3 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1/2}{3} - \frac{5/12}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{5}{24} = \frac{18-4-5}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{P(X_0 = 0) = u_0 = 1, P(X_1 = 0) = u_1 = \frac{1}{2}, P(X_2 = 0) = u_2 = \frac{5}{12} \text{ et } P(X_3 = 0) = u_3 = \frac{3}{8}.}$$

4) a) Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(k+1) P(X_n = k) = k P(X_{n-1} = k-1)$.

Alors $\sum_{k=1}^n (k+1) P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k P(X_{n-1} = k-1)$. Ce qui donne encore :

$$\sum_{k=1}^n k P(X_n = k) + \sum_{k=1}^n P(X_n = k) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) P(X_{n-1} = i) = \sum_{i=0}^{n-1} i P(X_{n-1} = i) + \sum_{i=0}^{n-1} P(X_{n-1} = i).$$

Alors $E(X_n) + \sum_{k=1}^n P(X_n = k) = E(X_{n-1}) + 1$ ou $E(X_n) + \sum_{k=0}^n P(X_n = k) - P(X_n = 0) = E(X_{n-1}) + 1$.

Ainsi $E(X_n) + 1 - u_n = 1 + E(X_{n-1})$ ou $E(X_n) - u_n = E(X_{n-1})$. Finalement. $E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n.}$$

b) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $E(X_n) = E(X_n) - 0 = E(X_n) - E(X_0) = \sum_{k=1}^n (E(X_k) - E(X_{k-1})) = \sum_{k=1}^n u_k$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = \sum_{k=1}^n u_k.}$$

c) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $n - 1$ appartient à \mathbb{N} !

Alors Q3 c appliquée pour $n - 1$ donne $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-1) - j + 1} = 1$ ou $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1$.

Q3 c donne encore $\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$. En détachant le dernier terme il vient : $u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

Alors $u_n = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1} \right) u_j \right)$.

Donc $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\frac{n-j+1 - (n-j)}{(n-j)(n-j+1)} \right) u_j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1, u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1 \text{ et } u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.}$$

d) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 0 < n-j+1 \leq n+1$ et $n-j > 0$.

Par produit il vient : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 0 < (n-j+1)(n-j) \leq (n+1)(n-j)$.

Alors $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{(n+1)(n-j)} \leq \frac{1}{(n-j+1)(n-j)}$ et $0 \leq u_j$.

Par produit on obtient : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{u_j}{(n+1)(n-j)} \leq \frac{u_j}{(n-j+1)(n-j)}$.

En sommant ceci donne : $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n+1)(n-j)} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j+1)(n-j)}$.

Ou encore : $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

Comme $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1$ et $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} : \frac{1}{n+1} \leq u_n$.

Notons que cette dernière inégalité vaut encore pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)}, u_n \geq \frac{1}{n+1}.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n+1} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

La série de terme général u_n diverge et est à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles est croissante et non convergente donc tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$. Alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = +\infty.}$$

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine.

1) a) De toute évidence :

$$\boxed{\{T = 1\} = \{X_1 = 0\} \text{ et } \{T = k\} = \{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 2\} \cap \dots \cap \{X_{k-1} = k-1\} \cap \{X_k = 0\}.}$$

b) Soit k un élément de $\llbracket 3, +\infty \rrbracket$. $\{T = k\} = \{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 2\} \cap \dots \cap \{X_{k-1} = k-1\} \cap \{X_k = 0\}$.

La formule des probabilités composées montre alors que $P(T = k)$ vaut :

$$P(X_1 = 1) \left(\prod_{i=2}^{k-1} P_{\{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \dots \cap \{X_{i-1}=i-1\}}(X_i = i) \right) P_{\{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \dots \cap \{X_{k-1}=k-1\}}(X_k = 0).$$

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Pour tout élément } i \text{ de } \llbracket 2, k-1 \rrbracket :$$

$$P_{\{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \dots \cap \{X_{i-1}=i-1\}}(X_i = i) = P_{\{X_{i-1}=i-1\}}(X_i = i) = \frac{(i-1) + 1}{(i-1) + 2} = \frac{i}{i+1}.$$

$$\text{De plus } P_{\{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \dots \cap \{X_{k-1}=k-1\}}(X_k = 0) = P_{\{X_{k-1}=k-1\}}(X_k = 0) = \frac{1}{(k-1) + 2} = \frac{1}{k+1}.$$

$$\text{Alors } P(T = k) = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=2}^{k-1} \frac{i}{i+1} \right) \frac{1}{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} \right) \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ainsi $P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$. Montrons que ce dernier résultat vaut encore pour $k = 1$ et $k = 2$.

$$P(T = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1(1+1)}.$$

$$P(T = 2) = P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}) = P(X_1 = 1) P_{\{X_1=1\}}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+2} = \frac{1}{2(2+1)}. \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}}.$$

c) • Soient deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)} = a + \frac{kb}{k+1}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient $0 = a + b$ donc $b = -a$.

En posant $k = 1$ on obtient : $\frac{1}{2} = a + \frac{b}{2}$ donc $2a + b = 1$.

$b = -a$ et $2a + b = 1$ donne sans difficulté $a = 1$ et $b = -1$.

- Réciproquement posons $a = 1$ et $b = -1$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

LES constantes a et b telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ sont respectivement 1 et -1 .

$$P(T=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T=k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

$$P(T=0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 1 = 0. \text{ Donc}$$

$P(T=0) = 0$ et il est donc quasi-impossible que le mobile ne retourne pas à l'origine.

- 2) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k P(T=k) = \frac{1}{k+1}$ donc la série de terme général $k P(T=k)$ est divergente. Ainsi :

T n'a pas d'espérance.

Partie 3 : informatique.

- 1) Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{k-j+1}$.

En faisant le changement d'indice $i = j + 1$ on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{u_{i-1}}{k-i+2}$.

On peut aussi faire le changement d'indice $i = k - j$ et obtenir : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{u_{k-i}}{i+1}$.

Répondons alors à la question en réécrivant la onzième ligne du programme (pour le moins le begin end ne s'impose pas...)

```
1 For i:=1 to k do s:=s+u[i-1]/(k-i+2); u[k]:=1-s;
```

Ou

```
1 For i:=1 to k do s:=s+u[k-i]/(i+1); u[k]:=1-s;
```

Il était sans doute plus naturel d'écrire :

```
1 For i:=0 to k-1 do s:=s+u[i]/(k-i+1); u[k]:=1-s;
```

Pour le deuxième point en se souvenant que $E(X_n) = \sum_{k=1}^n u_k$ on peut écrire en treizième ligne :

```
1 e:=e+u[k];
```

2) a) Ici c'est plus subtil. Notons que la variable T contient le temps.

Observons également que l'on commence par incrémenter T et que l'on décide après si le mobile retourne à l'origine ou pas.

Supposons qu'après l'instruction $T:=T+1$, T contienne la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$). Le mobile se trouve alors au point d'abscisse $k-1$ et il convient de décider si à l'instant k il retourne en O , d'arrêter dans ce cas le processus et de le poursuivre dans le cas contraire.

Le mobile étant au point d'abscisse $k-1$ il retourne à l'origine avec la probabilité $\frac{1}{(k-1)+2} = \frac{1}{k+1}$.

Remarquons que si l'on tire un nombre au hasard dans $[[0, k]]$ on obtient 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$.

Remarquons également que $\text{random}(k+1)$ donne un entier au hasard entre 0 et k et k est la valeur contenue dans T .

Ainsi en stockant $\text{random}(T+1)$ dans la variable hasard on décidera que le point est de retour à l'origine si (et seulement si) hasard a pris la valeur 0. La cinquième ligne du second programme peut donc être :

```
1 Repeat T:=T+1;hasard:=random(T+1);until(hazard=0);
```

b) Le nombre de passages dans la boucle peut être infini dans le cas où hasard ne prend jamais la valeur 0. La partie II nous a montré que cela était quasi-impossible.

Le nombre de passages dans la boucle est presque sûrement fini.
