EDHEC 2007 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $f_n : x \to \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $x+\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$.

En multipliant par e^{-x} qui est positif on obtient : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant n\,e^{-x}$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant n\,e^{-x}$. De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente puisque la fonction Γ est définie en 1 ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$ est défini(e).

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ converge également.

Soit x un élément de $[1,+\infty[$. $x+\dfrac{1}{n} \geqslant x \geqslant 1$. Ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant 1$.

En multipliant par e^{-x} qui est positif on obtient : $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$.

Par conséquent : $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$.

Alors $\forall A \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-e^{-x}\big]_1^A = e^{-1} - e^{-A} \leqslant e^{-1}$.

Donc $\forall A \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e}\cdot$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient : $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{e}\cdot}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit x un élément de $[0,1]$. $e^{-1} \leqslant e^{-x}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ donc $\dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\cdot$

$\forall x \in [0,1],\ \dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\cdot$ En intégrant $(0 \leqslant 1\,!)$ on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x.$

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{e}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x.$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} = \left[\ln\left|x+\frac{1}{n}\right|\right]_0^1 = \ln\left|1+\frac{1}{n}\right| - \ln\left|\frac{1}{n}\right| = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln n = \ln(n+1)$ (résultat que nous réutiliserons dans 3) c)).

Finalement : $\displaystyle\frac{1}{e}\ln(n+1) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = v_n.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1).}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $v_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$ et $w_n \geqslant 0$ donc $u_n = v_n + w_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1).$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\ln(n+1) = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Remarque *On a également :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$

3) a) $g : x \to \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $e^{-x} - 1 \underset{x\to0}{\sim} -x$ ou $1 - e^{-x} \underset{x\to0}{\sim} x$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x} = 1.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to0} g(x) = 1$. Finalement g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne très largement la convergence de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\boxed{\text{L'intégrale } I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}t \text{ est une intégrale convergente.}}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $x \to \dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0,1]$.

Soit x un élément de $]0,1]$. $x + \dfrac{1}{n} \geqslant x > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ De plus $0 < 1 - e^{-x}$.

Par conséquent : $0 \leqslant \dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1-e^{-x}}{x}\cdot$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}t$ existent on obtient en intégrant $(0 \leqslant 1\,!)$:

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant I.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{n}} - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1) - v_n$ (d'après le résultat obtenu dans Q2 b).

Donc $0 \leqslant \ln(n+1) - v_n \leqslant I$ ou $\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1).}$$

d) Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a alors $u_n = v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) > 0$ et $\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1)$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \dfrac{I}{\ln(n+1)} \leqslant \dfrac{v_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{I}{\ln(n+1)}\right) = 1$. Il vient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\ln(n+1)} = 1$.

Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0 \times 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Ainsi : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Finalement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

EXERCICE 2

Remarque *Observons qu'en posant* $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *on a :*

$I = \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} -S & O_2 \\ O_2 & S \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} O_2 & -I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} O_2 & S \\ S & O_2 \end{pmatrix}$.

Notons également que $S^2 = -I_2$. *Les spécialistes des produits par blocs pourront alors gagner un peu de temps...*

1) Par définition (I, J, K, L) est une famille génératrice de E. Montrons que cette famille est libre.

Soient a, b, c et d quatre réels tels que : $a\,I + b\,J + c\,K + d\,L = 0_E$. Montrons que ces quatre réels sont nuls.

$$a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=0_E.$$

Ainsi : $\begin{pmatrix}a&-b&-c&d\\b&a&-d&-c\\c&d&a&b\\-d&c&-b&a\end{pmatrix}=0_E$. Alors $a=b=c=d=0$.

Ceci achève de montrer que (I,J,K,L) est une famille libre de E. Rappelons qu'elle engendre E.

Alors (I,J,K,L) est une base de E. Cette famille étant de cardinal quatre, E est de dimension 4.

$$\boxed{(I,J,K,L) \text{ est une base de } E \text{ et } E \text{ est de dimension } 4.}$$

2) a) $JK=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=L.$

$$KL=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=J.$$

$$LJ=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=K.$$

$$\boxed{JK=L,\ KL=J \text{ et } LJ=K.}$$

b) $J^2=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=-I.$

$$K^2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=-I.$$

$$L^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=-I.$$

$$\boxed{J^2=-I,\ K^2=-I \text{ et } L^2=-I.}$$

$J=KL$ donc $KJ=K^2L=-IL=-L$.

De même : $K=LJ$ donc $LK=L^2J=-IJ=-J$; $L=JK$ donc $JL=J^2K=-IK=-K$.

$$\boxed{KJ=-L,\ LK=-J \text{ et } JL=-K.}$$

c) Soient P et P' deux éléments de E. Montrons que PP' est un élément de E.

Soient (a, b, c, d) (resp. (a', b', c', d')) les coordonnées de P (resp. P') dans la base (I, J, K, L) de E.

Ainsi $P = a\,I + b\,J + c\,K + d\,L$ et $P' = a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L$.

Donc $PP' = (a\,I + b\,J + c\,K + d\,L)\,(a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L)$.

En utilisant les propriétés usuelles des opérations de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on obtient :

$PP' = aa'\,I + ba'\,J + ca'\,K + da'\,L + ab'\,J + bb'\,J^2 + cb'\,KJ + db'\,LJ + ac'\,K + bc'\,JK + cc'\,K^2 + dc'\,LK + ad'\,L + bd'\,JL + cd'\,KL + dd'\,L^2$. a) et b) donnent alors :

$PP' = aa'\,I + ba'\,J + ca'\,K + da'\,L + ab'\,J - bb'\,I - cb'\,L + db'\,K + ac'\,K + bc'\,L - cc'\,I - dc'\,J + ad'\,L - bd'\,K + cd'\,J - dd'\,I$.

Donc $PP' = (aa' - bb' - cc' - dd')\,I + (ba' + ab' - dc' + cd')\,J + (ca' + db' + ac' - bd')\,K + (da' - cb' + bc' + ad')\,L$.
PP' est combinaison linéaire des éléments de la famille (I, J, K, L), c'est donc bien un élément de E. Ainsi

$$\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

3) $A^2 = (J + K)^2 = (J + K)(J + K) = J^2 + KJ + JK + K^2 = -I - L + L - I = -2\,I$.

$$\boxed{A^2 = -2\,I.}$$

Alors $A\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = I$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right)A = I$. A est donc inversible et d'inverse $-\dfrac{1}{2}\,A$.

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{2}\,A.}$$

4) a) • Soit M un élément de E. $\varphi_A(M) = AMA^{-1} = AM\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = -\dfrac{1}{2}\,AMA$.

M et A sont deux éléments de E et E est stable par le produit matriciel donc AMA est encore un élément de E.

E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{2}\,AMA$ appartient également à E. Ainsi $\varphi_A(M)$ est un élément de E.

φ_A est une application de E dans E.

• Soit λ un réel. Soient M et N deux éléments de E.

$\varphi_A(\lambda\,M + N) = A(\lambda\,M + N)A^{-1} = (\lambda AM + AN)A^{-1} = \lambda\,AMA^{-1} + ANA^{-1} = \lambda\,\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$.

φ_A est donc une application linéaire. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

b) Soit M un élément de $\operatorname{Ker}\varphi_A$. $AMA^{-1} = 0_E$. Alors $M = A^{-1}AMA^{-1}A = A^{-1}\,0_E\,A = 0_E$.

Ce qui suffit pour dire que :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi_A = \{0_E\}.}$$

Alors φ_A est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie donc :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme de } E.}$$

Exercice *Montrer que :* $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{\left(-\frac{1}{2}A\right)} = \varphi_A$.

En déduire que φ_A *est une symétrie vectorielle.*

5) a) Nous avons vu dans 2) c) que si $P = a\,I + b\,J + c\,K + d\,L$ et $P' = a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L$ sont deux éléments de E :

$$PP' = (aa' - bb' - cc' - dd')\,I + (ba' + ab' - dc' + cd')\,J + (ca' + db' + ac' - bd')\,K + (da' - cb' + bc' + ad')\,L.$$

Notons que $A = 0\,I + J + K + 0\,L$.

Soit M un élément de E de coordonnées (x, y, z, t) dans la base (I, J, K, L). $M = x\,I + y\,J + z\,K + t\,L$.

Alors $AM = (-y - z)\,I + (x + t)\,J + (x - t)\,K + (-y + z)\,L$.

Donc $AMA = \Big((-y - z)\,I + (x + t)\,J + (x - t)\,K + (-y + z)\,L\Big)A$.

En réutilisant la formule de 2) c) il vient :

$$AMA = \big(-(x+t) - (x-t)\big)\,I + \big((-y-z) - (-y+z)\big)\,J + \big((-y+z) + (-y-z)\big)\,K + \big(-(x-t) + (x+t)\big)\,L.$$

Ainsi : $AMA = (-2x)\,I + (-2z)\,J + (-2y)\,K + 2t\,L$. Alors $\varphi_A(M) = -\dfrac{1}{2}AMA = x\,I + z\,J + y\,K - t\,L$.

Finalement $M = x\,I + y\,J + z\,K + t\,L$ donne $\varphi_A(M) = x\,I + z\,J + y\,K - t\,L$.

Alors $\varphi_A(I) = I$, $\varphi_A(J) = K$, $\varphi_A(K) = J$ et $\varphi_A(L) = -L$. Ceci permet de dire que :

$$\boxed{\text{la matrice } \Phi_A \text{ de } \varphi_A \text{ dans la base } (I, J, K, L) \text{ est : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Φ_A est une matrice symétrique à coefficients réels donc Φ_A est diagonalisable. Alors :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

b) $\varphi_A(I) = I$ et $I \neq 0_E$ donc 1 est une valeur propre de φ_A et I en est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$\varphi_A(L) = -L$ et $L \neq 0_E$ donc -1 est une valeur propre de φ_A et L en est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Notons encore que $\varphi_A(J+K) = K+J = J+K$ et $\varphi_A(J-K) = K-J = -(J-K)$.

$J+K$ (resp. $J-K$) est alors un élément du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, 1)$ (resp. SEP $(\varphi_A, -1)$) de φ_A associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

Montrons alors que $(I, J+K)$ (resp. $(L, J-K)$) est une famille libre de SEP $(\varphi_A, 1)$ (resp. SEP $(\varphi_A, -1)$).

Soient α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta(J+K) = 0_E$. $\alpha I + \beta J + \beta K = 0_E$.

Or (I, J, K) est une famille libre de E comme sous-famille de la base (I, J, K, L). Donc $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(I, J+K)$ est libre.

Soient α' et β' deux réels tels que $\alpha' L + \beta'(J-K) = 0_E$. $\beta' J - \beta' K + \alpha' L = 0_E$.

Or (J, K, L) est une famille libre de E comme sous-famille de la base (I, J, K, L). Donc $\alpha' = \beta' = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(L, J-K)$ est libre.

Ainsi $(I, J+K)$ est une famille libre du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, 1)$ de φ_A associé à la valeur propre 1 et $(L, J-K)$ est une famille libre du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, -1)$ de φ_A associé à la valeur propre -1.

Donc $\dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, 1) \geqslant 2$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, -1) \geqslant 2$. Or $\dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, 1) + \dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, -1) \leqslant \dim E = 4$ car la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A est inférieure ou égale à la dimension de E.

Nécessairement $\dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, 1) = \dim \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, -1) = 2$.

$(I, J+K)$ est alors une famille libre de cardinal 2 de SEP $(\varphi_A, 1)$ qui est de dimension 2 ; ainsi $(I, J+K)$ est une base de SEP $(\varphi_A, 1)$.

$(L, J-K)$ est alors une famille libre de cardinal 2 de SEP $(\varphi_A, -1)$ qui est de dimension 2 ; ainsi $(L, J-K)$ est une base de SEP $(\varphi_A, -1)$.

Notons que dans ces conditions φ_A ne peut pas avoir d'autres valeurs propres.

φ_A admet exactement deux valeurs propres 1 et -1.
$(I, J+K)$ est une base du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1.
$(L, J-K)$ est une base du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre -1.

Remarque 1 $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) = \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, 1)$ *et* $\mathrm{Ker}(\varphi_A + id) = \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, -1)$ *sont supplémentaires dans* E.

Remarque 2 *Pour rechercher les valeurs propres de φ_A on aurait pu utiliser le fait que φ_A est une symétrie vectorielle...*

6) a) Soient $P = (p_{i,j})$ et $Q = (q_{i,j})$ deux éléments de E. Posons $PQ = (r_{i,j})$ et $QP = (s_{i,j})$.

$\mathrm{tr}(PQ) = \sum\limits_{i=1}^{4} r_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{4} p_{i,k}\, q_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{4} q_{k,i}\, p_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{4} q_{k,i}\, p_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{4} s_{k,k} = \mathrm{tr}(QP).$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } E,\ \mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP).}$$

b) Commençons par remarquer que $A = J + K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi ${}^tA = -A$.

On a encore ${}^tA^{-1} = {}^t\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = -\dfrac{1}{2}\,{}^tA = \dfrac{1}{2}\,A = -A^{-1}$.

Soient M et N deux éléments de E.

$\big(\varphi_A(M)|N\big) = \mathrm{tr}\,\big({}^t(AMA^{-1})N\big) = \mathrm{tr}({}^tA^{-1}\,{}^tM\,{}^tAN) = \mathrm{tr}\,\big((-A^{-1})\,{}^tM(-A)N\big) = \mathrm{tr}\,\big(A^{-1}\,{}^tMAN\big)$.

a) permet alors d'écrire : $\big(\varphi_A(M)|N\big) = \mathrm{tr}\,\big({}^tMANA^{-1}\big) = \big(M|\varphi_A(N)\big)$.

Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

c) Nous avons vu plus haut que $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_A + id)$ sont deux sous-espaces propres de φ_A supplémentaires dans E. φ_A étant un endomorphisme symétrique, ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi_A + id) \text{ sont supplémentaires et orthogonaux dans } E.}$$

Remarque *Nous avions dit que φ_A est une symétrie vectorielle de E ; ceci permet d'ajouter que φ_A est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à* $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) = \mathrm{Vect}(I, J + K)$.

EXERCICE 3

---

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1 (ou la loi gamma de paramètres 1 et 1... ou la loi gamma de paramètre 1). Le cours permet alors de dire que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ suit la loi gamma de paramètres 1 et } n,\ E(S_n) = n \text{ et } V(S_n) = n.}$$

2) $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la même loi ayant une espérance égale à 1 et une variance (non nulle) égale à 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que la suite de terme général $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Alors, pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) = \Phi(x)$.

En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\cdot$ Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(S_n \leqslant E(S_n)\right) = \frac{1}{2}\cdot$

Or $E(S_n) = n$. Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}\cdot}$$

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n.

Posons alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{S_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}\, t^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_{S_n} est une densité de S_n.

Alors $\displaystyle P(S_n \leqslant n) = \int_{-\infty}^{n} f_{S_n}(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{e^{-t}\, t^{n-1}}{\Gamma(n)}\, \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{e^{-t}\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}t$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot}$$

4) a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \neq 0$ donc $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\cdot$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to \dfrac{t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cela autorise le changement de variable $z = \dfrac{t}{n}$ dans $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On obtient alors :

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}\, e^{-n\,z}}{(n-1)!}\, n\, \mathrm{d}z = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z.$$

Alors $\displaystyle\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\,z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}\cdot$

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\,z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}\cdot}$$

b) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\, n}\, n^n\, e^{-n}$ donc $\dfrac{n!}{2\, n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi\, n}\, n^n\, e^{-n}}{2\, n^{n+1}}$ ou $\dfrac{n!}{2\, n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\, e^n}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\, z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\, e^n}\cdot}$$

PROBLÈME

Pour plus de lisibilité nous noterons, pour tout élément i de $\mathbb{N}^*$, N_i l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire. Nous noterons également V l'événement le premier tirage a lieu dans l'urne V.

Partie 1

---

1) a) (U, V) est un système complet d'événements et $P(U) = P(V) = \dfrac{1}{2}\cdot$

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$P(X = 1) = P(N_1) = P(U)\, P_U(N_1) + P(V)\, P_V(N_1) = \dfrac{1}{2}\big(P_U(N_1) + P_V(N_1)\big).$

L'urne U contient n boules dont $n-1$ sont noires et une blanche donc : $P_U(N_1) = \dfrac{n-1}{n}\cdot$

L'urne V contient n boules dont $n-1$ sont blanches et une noire donc : $P_V(N_1) = \dfrac{1}{n}\cdot$

Ainsi $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}\cdot}$$

b) Soit k un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $P(X = k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)$.

Le système complet d'événements (U, V) et la formule des probabilités totales permettent encore d'écrire :

$P(X = k) = P(U)\, P_U(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(V)\, P_V(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)$. Donc :

$P(X = k) = \dfrac{1}{2}\big(P_U(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(V)\, P_V(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)\big).$

Supposons U réalisé. On tire alors successivement une boule dans U avec remise. Ainsi, les tirages sont indépendants, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\dfrac{1}{n}$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Alors $P_U(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} \dfrac{n-1}{n}\cdot$

On obtient de la même manière : $P_V(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} \dfrac{1}{n}\cdot$

Remarque *La loi de X sachant U (resp. V) est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-1}{n}$ (resp. $\dfrac{1}{n}$)*

Alors $P(X=k)=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{n-1}{n}+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}\right)$.

$$\boxed{\forall k\in [\![2,+\infty[\![,\ P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right).}$$

Notons que si k est égal à 1 : $\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{n-1}{n}+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}=P(X=1)$. Alors :

$$\boxed{\forall k\in \mathbb{N}^*,\ P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right).}$$

2) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ k\,P(X=k)=\dfrac{n-1}{2n}\,k\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}+\dfrac{1}{2n}\,k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

$\left|\dfrac{1}{n}\right|<1$ et $\left|\dfrac{n-1}{n}\right|<1$ donc les séries de termes généraux $k\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ sont convergentes (séries géométriques dérivées).

La série de terme général $k\,P(X=k)$ est alors convergente comme combinaison linéaire de deux séries convergentes. Étant à termes positifs elle est alors absolument convergente.

Tout ceci montre que $E(X)$ existe et que $E(X)=\dfrac{n-1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}+\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

$E(X)=\dfrac{n-1}{2n}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}=\dfrac{n-1}{2n}\dfrac{n^2}{(n-1)^2}+\dfrac{1}{2n}n^2=\dfrac{n}{2\,(n-1)}+\dfrac{n}{2}=\dfrac{n+n(n-1)}{2(n-1)}\cdot$

Ainsi $E(X)=\dfrac{n^2}{2(n-1)}\cdot$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{n^2}{2(n-1)}\cdot}$$

Exercice *Retrouver ce résultat sans calcul en utilisant des espérances conditionnelles.*

3) Rappelons que X compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire et Y compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.

Observons que la proportion de boules blanches dans U est la même que la proportion de boules noires dans V (et la proportion de boules noires dans U est la même que la proportion de boules blanches dans V). De plus la probabilité de faire le premier tirage dans U est la même que celle de faire le premier tirage dans V. Alors :

$$\boxed{\text{La loi de } Y \text{ est la même que la loi de } X.}$$

4)

```
Program EDHEC_2007_P1;
Var x,n,tirage,hasard:integer;

Begin
 Randomize;
 Write('Donner n. n=');Readln(n);
 hasard:=random(2);x:=0;

 If hasard=0  then Repeat
                   x:=x+1;
                   tirage:=random(n);
                   until (tirage=0)
             Else Repeat
                   x:=x+1;
                   tirage:=random(n);
                   until (tirage>0);

 Writeln('Le nombre de tirages pour obtenir une boule noire est : ',x);
 End.
```

Partie 2

---

1) a) Les conditions du premier tirage n'ont pas changé donc

$$\boxed{P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot}$$

b) Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $P(X=k)=P(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)$. La formule des probabilités composées donne alors :

$P(X=k)=P(B_1)\,P_{B_1}(B_2)\,P_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\,P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$.

$P(X=k)=P(B_1)\left(\displaystyle\prod_{i=2}^{k-1}P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i)\right)P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$ (à un petit abus près).

$P(B_1)=P(U)\,P_U(B_1)+P(V)\,P_V(B_1)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot$

Si i est dans $[\![2,+\infty[\![$ et si $B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{i-1}$ est réalisé alors le $i^{\text{ème}}$ tirage se fait dans U qui contient 1 boule blanche et $n-1$ boules noires.

Donc $\forall i\in[\![2,k-1]\!]$, $P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i)=\dfrac{1}{n}$ et $P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)=\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Ainsi $P(X=k)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n}\cdot$

$$\boxed{\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}\cdot}$$

2) $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ k\,P(X=k) = \dfrac{n-1}{2}\,k\,\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}.$

$\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$ donc la série de terme général $k\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ converge (série géométrique dérivée).

Il en est alors de même de la série de terme général $k\,P(X=k)$. Cette série étant à termes positifs elle est absolument convergente. Ceci montre alors que X possède une espérance.

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + \sum_{k=2}^{+\infty} k\,P(X=k) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} - 1\right).$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n-1} - \frac{n-1}{2} = \frac{n-1+n^2-(n-1)^2}{2\,(n-1)} = \frac{3n-2}{2\,(n-1)}.$$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{3n-2}{2\,(n-1)}.}$$

Exercice *Trouver la loi de X sachant B_1 (resp. N_1). Retrouver alors sans calcul $E(X)$.*

3) Notons d'abord que $P(X=1) = P(N_1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(Y=1) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

Soit k est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $\{X=k\}$ se réalise si et seulement si le premier tirage donne une boule blanche puis $k-1$ tirages dans U sont encore nécessaires et suffisants pour obtenir une boule noire.

$\{Y=k\}$ se réalise si et seulement si le premier tirage donne une boule noire puis $k-1$ tirages dans V sont encore nécessaires et suffisants pour obtenir une boule blanche.

$P(B_1) = P(N_1)$ et la proportion de boules noires dans U est la même que la proportion de boules blanches dans V, donc $P(X=k) = P(Y=k)$. Finalement :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$$

4) • Version 1 Dans l'esprit du texte.

• Ou le premier tirage se fait dans V et deux cas se présentent :

1. le premier tirage donne la boule noire et c'est terminé ;

2. le premier tirage donne une boule blanche ; on change alors d'urne c'est à dire que l'on tire dans l'urne U jusqu'à obtenir une boule noire.

• Ou le premier tirage se fait dans U donc tous les tirages se font dans U jusqu'à obtenir une boule noire.

```
Program EDHEC_2007_P1; Var x,n,tirage,hasard:integer;

Begin
 Randomize;
 Write('Donner n. n=');Readln(n);
```

```
hasard:=random(2);x:=0;

If hasard=0  then begin
                  x:=x+1;tirage:=random(n);
                  if tirage>0 then
                               Repeat
                               x:=x+1;
                               tirage:=random(n);
                               until (tirage>0);
                  end
             Else Repeat
                  x:=x+1;
                  tirage:=random(n);
                  until (tirage>0);

Writeln('Le nombre de tirages pour obtenir une boule noire est : ',x);
End.
```

• Version 2 Notons que la probabilité pour obtenir une boule noire au premier tirage est 1/2. Dans ce cas l'expérience est terminée. Dans le cas contraire (le premier tirage a donné une boule blanche) on fait des tirages dans U jusqu'à obtenir une boule noire. Notons également que les variables hasard et tirage ne sont pas indispensables.

```
Program EDHEC_2007_P2_V2;
Var x,n :integer;

Begin
 Randomize;
 Write('Donner n. n=');readln(n);
 x:=1;

 If random(2)=0  Then repeat
                      x:=x+1;
                      until (random(n)>0)
                  end;
 Writeln('Le nombre de tirages pour obtenir une boule noire est : ',x);
End.
```

Partie 3

1) a) Pour la troisième fois :

$$\boxed{P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot}$$

b) Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $P(X=k)=P(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)$.

Rappelons que (U,V) est un système complet d'événements donc :

$P(X=k)=P(U\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)+P(V\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)$.

$P(U\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=P(U)\,P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)$ (a un petit abus près).

$P(U\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}\,P_{U\cap B_1}(B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)$.

Rappelons que l'on ne change pas d'urne après l'obtention d'une boule blanche. Supposons que $U\cap B_1$ est réalisé c'est dire que le premier tirage se fasse dans l'urne U et donne un boule blanche. $B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k$ se réalise alors si et seulement si les $k-1$ tirages suivants se font dans U et donne successivement $k-2$ boules blanches et une boule noire.

Ainsi : $P_{U\cap B_1}(B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Alors

$P(U\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{n-1}{2\,n^k}\cdot$ De même :

$P(V\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=P(V)\,P_V(B_1)P_{V\cap B_1}(B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{1}{n}\cdot$

$P(V\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)=\dfrac{(n-1)^{k-1}}{2\,n^k}\cdot$

Finalement $P(X=k)=\dfrac{n-1}{2\,n^k}+\dfrac{(n-1)^{k-1}}{2\,n^k}=\dfrac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2\,n^k}\cdot$

$$\boxed{\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X=k)=\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2\,n^k}\cdot}$$

Si $k=1$: $\dfrac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2\,n^k}=\dfrac{1+n-1}{2\,n}=\dfrac{1}{2}=P(X=1)$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(X=k)=\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2\,n^k}\cdot}$$

c) $\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(X=k)=\dfrac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2\,n^k}=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{n-1}{n}\right)$.

$$\forall k \in [\![1,+\infty[\![,\ P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\ \frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\ \frac{1}{n}\right).$$

Nous retrouvons ainsi la loi de la variable aléatoire X de la première partie. Ainsi :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et } E(X)=\frac{n^2}{2(n-1)}\cdot}$$

2) a) Soit i un élément de $\mathbb{N}^*$. $P(Y=2i)=P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i-1}\cap B_{2i})$.

Comme (U,V) est un système complet d'événements :

$P(Y=2i)=P(U\cap N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i-1}\cap B_{2i})+P(V\cap N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i-1}\cap B_{2i})$.

Calculons $a=P(U\cap N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i-1}\cap B_{2i})$.

$a=P(U)P_U(N_1)P_{U\cap N_1}(N_2)\cdots P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-2}}(N_{2i-1})P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}}(B_{2i})$.

$a=P(U)\,P_U(N_1)\,\Big(\displaystyle\prod_{k=2}^{2i-1}P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)\Big)\,P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}}(B_{2i})$ (à un abus près... si $i=1$).

$a=P(U)\,P_U(N_1)\,\Big(\displaystyle\prod_{k=2}^{i}P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}}(N_{2k-1})\Big)\Big(\prod_{k=1}^{i-1}P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}}(N_{2k})\Big)P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}}(B_{2i})$.

$P(U)=\dfrac{1}{2}$ et $P_U(N_1)=\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Soit k un élément de $[\![2,i]\!]$. Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}$ est réalisé le $(2k-1)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne U.

Alors $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}}(N_{2k-1})=\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Soit k un élément de $[\![1,i-1]\!]$. Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}$ est réalisé le $(2k)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne V.

Alors $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}}(N_{2k})=\dfrac{1}{n}\cdot$

Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}$ est réalisé le $(2i)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne V donc : $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}}(B_{2i})=\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Finalement : $a=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n-1}{n}\,\Big(\displaystyle\prod_{k=2}^{i}\frac{n-1}{n}\Big)\,\Big(\prod_{k=1}^{i-1}\frac{1}{n}\Big)\,\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)^{i+1}}{2\,n^{2i}}\cdot$

Pour calculer $b=P(V\cap N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i-1}\cap B_{2i})$ on peut à l'aide d'un copier-coller réécrire la séquence en modifiant ce qui doit l'être, c'est à dire en remplaçant U par V et en échangeant $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Le jour du concours il est plus raisonnable de dire que l'on procède de la même manière et que b s'obtient à partir de a en échangeant $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Alors $b=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}\,\Big(\displaystyle\prod_{k=2}^{i}\frac{1}{n}\Big)\,\Big(\prod_{k=1}^{i-1}\frac{n-1}{n}\Big)\,\frac{1}{n}=\frac{(n-1)^{i-1}}{2\,n^{2i}}\cdot$ Par conséquent :

$$P(Y=2i)=a+b=\frac{(n-1)^{i+1}}{2\,n^{2i}}+\frac{(n-1)^{i-1}}{2\,n^{2i}}=\frac{(n-1)^{i-1}}{2\,n^{2i}}\big((n-1)^2+1\big)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\ \frac{n^2-2n+2}{2n^2}\cdot$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2-2n+2}{2n^2}\cdot}$$

b) Soit i un élément de $\mathbb{N}^*$. $P(Y=2i+1) = P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{2i} \cap B_{2i+1})$.

Comme (U,V) est un système complet d'événements :

$P(Y=2i+1) = P(U \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{2i} \cap B_{2i+1}) + P(V \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{2i} \cap B_{2i+1})$.

Calculons $a' = P(U \cap N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{2i} \cap B_{2i+1})$.

$a' = P(U)P_U(N_1)P_{U\cap N_1}(N_2)\cdots P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i-1}}(N_{2i})P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i}}(B_{2i+1})$.

$a' = P(U)\,P_U(N_1)\,\left(\prod_{k=2}^{2i} P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)\right)\,P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i}}(B_{2i+1})$.

$a' = P(U)\,P_U(N_1)\,\left(\prod_{k=2}^{i} P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}}(N_{2k-1})\right)\left(\prod_{k=1}^{i} P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}}(N_{2k})\right)P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i}}(B_{2i+1})$ (à un abus près... si $i=1$).

$P(U) = \dfrac{1}{2}$ et $P_U(N_1) = \dfrac{n-1}{n}\cdot$

Soit k un élément de $[\![2,i]\!]$. Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}$ est réalisé le $(2k-1)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne U.

Alors $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-2}}(N_{2k-1}) = \dfrac{n-1}{n}\cdot$

Soit k un élément de $[\![1,i]\!]$. Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}$ est réalisé le $(2k)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne V.

Alors $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2k-1}}(N_{2k}) = \dfrac{1}{n}\cdot$

Si $U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i}$ est réalisé le $(2i+1)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne U donc : $P_{U\cap N_1\cap\cdots\cap N_{2i}}(B_{2i+1}) = \dfrac{1}{n}\cdot$

Finalement : $a' = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{n-1}{n}\,\left(\prod_{k=2}^{i}\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\prod_{k=1}^{i}\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n} = \dfrac{(n-1)^i}{2\,n^{2i+1}}\cdot$

Pour calculer $b' = P(V\cap N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{2i}\cap B_{2i+1})$ il suffit dans la ligne précédente d'échanger $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{n-1}{n}\cdot$

Alors $b' = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}\,\left(\prod_{k=2}^{i}\dfrac{1}{n}\right)\left(\prod_{k=1}^{i}\dfrac{n-1}{n}\right)\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)^{i+1}}{2\,n^{2i+1}}\cdot$

$P(Y=2i+1) = a'+b' = \dfrac{(n-1)^i}{2\,n^{2i+1}} + \dfrac{(n-1)^{i+1}}{2\,n^{2i+1}} = \dfrac{(n-1)^i}{2\,n^{2i+1}}(1+n-1) = \dfrac{1}{2}\,\left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)^i\cdot$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=2i+1) = \frac{1}{2}\,\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i.}$$

Si $i=0$, $\dfrac{1}{2}\,\left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)^i = \dfrac{1}{2}\cdot$ Or comme dans les parties 1 et 2 on a $P(Y=1) = \dfrac{1}{2}$ donc la formule précédente vaut encore pour $i=0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ P(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i.}$$

c) Rectifions le texte et posons $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ E_N(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\, P(Y = k)$.

Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $E_{2N}(Y) = \sum_{i=1}^{N} \Big((2i)\, P(Y = 2i)\Big) + \sum_{i=1}^{N} \Big((2i-1)\, P(Y = 2i-1)\Big)$.

$$E_{2N}(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left((2i)\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2-2n+2}{2\,n^2}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left((2i-1)\,\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right).$$

$$E_{2N}(Y) = \sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{n^2}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right).$$

$$E_{2N}(Y) = \left(\frac{n^2-2n+2}{n^2}+1\right)\sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}.$$

$$E_{2N}(Y) = \left(\frac{2n^2-2n+2}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}.$$

$\left|\dfrac{n-1}{n^2}\right| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} = \frac{1}{1-\frac{n-1}{n^2}}$.

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\right) = \frac{n^4}{(n^2-n+1)^2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} = \frac{n^2}{n^2-n+1}$.

Alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E_{2N}(Y) = \left(\frac{2n^2-2n+2}{n^2}\right)\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n^2-n+1} = 2\,\frac{n^2}{n^2-n+1} - \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n^2-n+1}$.

Finalement : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E_{2N}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}$.

$$\boxed{\text{La suite } \big((E_{2N}(Y)\big)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et a pour limite } \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}.}$$

Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $E_{2N+1}(Y) = E_{2N}(Y) + (2N+1)\,P(Y = 2N+1) = E_{2N}(Y) + (2N+1)\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)^N$.

$\left|\dfrac{n-1}{n^2}\right| < 1$ donc par croissance comparée :

$$\lim_{N\to+\infty}\left((2N+1)\,\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^N\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(N\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^N + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^N\right) = 0.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E_{2N+1}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} + 0 = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}$.

$$\boxed{\text{La suite } \big((E_{2N+1}(Y)\big)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge et a même limite que la suite } \big((E_{2N}(Y)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}.}$$

Les suites $\left((E_{2N}(Y)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left((E_{2N+1}(Y)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite : $\dfrac{3\,n^2}{2(n^2-n+1)}\cdot$

Alors la suite $\left((E_N(Y)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite : $\dfrac{3\,n^2}{2(n^2-n+1)}\cdot$

Par conséquent la série de terme général $k\,P(Y=k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(Y=k) = \frac{3\,n^2}{2(n^2-n+1)}\cdot$

Comme $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ k\,P(Y=k)\geqslant 0$, la série de terme général $k\,P(Y=k)$ est absolument convergente.

Ainsi $E(Y)$ existe et vaut $\dfrac{3\,n^2}{2(n^2-n+1)}\cdot$

$$\boxed{Y \text{ possède une espérance et } E(Y) = \frac{3\,n^2}{2(n^2-n+1)}\cdot}$$

3) a) Supposons que $n=2$.

$\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(X=k) = \dfrac{(2-1)^{k-1}+2-1}{2\times 2^k} = \dfrac{1}{2^k}\cdot$

$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=2i) = \left(\dfrac{2-1}{2^2}\right)^{i-1}\dfrac{2^2-2\times 2+2}{2\times 2^2} = \dfrac{1}{2^{2i-2}}\,\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^{2i}}\cdot$

$\forall i\in\mathbb{N},\ P(Y=2i+1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-1}{2^2}\right)^{i} = \dfrac{1}{2^{2i+1}}\cdot$

Par conséquent : $\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(Y=k) = \dfrac{1}{2^k}\cdot$

Finalement $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=P(Y=k)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}.$

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}\cdot}$$

b) Si $n=2$ l'urne U et l'urne V contiennent chacune une boule blanche et une boule noire. Le changement d'urne ne modifie pas la probabilité de tirer une boule noire (resp. blanche.) Ainsi à chaque tirage la probabilité d'obtenir une blanche est $\dfrac{1}{2}$ comme la probabilité d'obtenir une boule noire.

Tout se passe comme si l'on faisait des tirages successifs d'une boule avec remise dans une seule urne contenant une boule blanche et une boule noire. Le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire (resp. blanche) suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$

4) $E(X)-E(Y) = \dfrac{n^2}{2\,(n-1)} - \dfrac{3\,n^2}{2\,(n^2-n+1)} = \dfrac{n^2\ (n^2-n+1-3(n-1))}{2\,(n-1)\,(n^2-n+1)} = \dfrac{n^2\ (n^2-4n+4)}{2\,(n-1)\,(n^2-n+1)}\cdot$

$E(X)-E(Y) = \dfrac{n^2\ (n-2)^2}{2\,(n-1)\,(n^2-n+1)}\cdot$

Alors si $n>2$, $E(X)-E(Y)>0$ et si $n=2$, $E(X)-E(Y)=0$. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{E(Y)\leqslant E(X) \text{ avec égalité si et seulement si } n=2.}$$

5) Le programme est identique à celui de la partie I. En effet on tire des boules blanches jusqu'à obtenir une boule noire donc tous les tirages se font dans l'urne choisie pour le premier tirage.