EDHEC
BUSINESS SCHOOL
Lille - Nice

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Une première inégalité.

a. Montrer que $P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

b. En déduire l'inégalité $(*)$: $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$

2) Première amélioration de l'inégalité $(*)$.

a. Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et ayant une espérance. On note $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$. Montrer, en minorant $E(Y)$, que : $\forall a > 0,\ P(Y \geq a) \leq \dfrac{E(Y)}{a}$.

b. On considère une variable aléatoire discrète Z, d'espérance nulle et de variance σ^2. Montrer que, pour tout couple (a,x) de $]0,+\infty[\times \mathbb{R}_+$:
$P(Z \geq a) \leq P((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$.

c. En appliquant l'inégalité obtenue en 2a) à la variable aléatoire $(Z+x)^2$, montrer que :
$\forall a > 0,\ \forall x \geq 0,\ P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.

d. En déduire que : $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ (on pourra étudier la fonction f qui, à tout x de $\mathbb{R}_+$, associe $\dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$).

e. Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

3) Deuxième amélioration de l'inégalité (*).

Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k$.

a. Justifier l'existence de $G_X(t)$ et montrer que : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

b. Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[,\ \forall a > 0,\ P(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

c. Déterminer le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$.

d. En déduire que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

4) Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 2e) dès que λ prend des valeur assez grandes.

Exercice 2

1) On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$.

2) Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3) a. Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t^x)}$.

b. Pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[1, +\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1 + t^x}$, puis établir que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

c. En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leq \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x + 1}$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

5) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.

1) a. Déterminer une densité de Z.

b. Montrer que, pour tout x de $]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1-x < Z \leq 1+x)$ sont indépendants.

2) On pose $T = \text{Max}(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Montrer que T est une variable à densité puis donner une densité de T.

b. En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c. On pose $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

Problème

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie 1

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0, 1]$.

En particulier, E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

On note N l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant de plus $f(0) = f(1) = 0$.

On considère l'application u de N dans E_0 qui, à toute fonction f de N associe sa dérivée seconde, notée f''.

1) Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2.

2) Montrer que u est une application linéaire injective.

3) Soit g un élément de E_0. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\, g(t)\, dt$.

a. Justifier que G est élément de E_1 et montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,dt - \int_x^1 g(t)\,dt \right).$$

b. En déduire que G est élément de E_2 et déterminer G''.

c. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à N.

d. Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u est surjective.

e. Que peut-on déduire des questions 2) et 3d) ?

4) Vérifier que, pour tout x élément de $[0,1]$:

$$(u^{-1})(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\, g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\, g(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\, g(t)\,dt.$$

Partie 2

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x, on pose $e_k(x) = x^k$, avec bien sûr $e_0(x) = 1$, et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ est une base de P_n.

On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à n et telles que $P(0) = P(1) = 0$.

Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.

1) Montrer que $C = (f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de N_{n+2}.

On considère l'application linéaire v de N_{n+2} dans P_n qui, à toute fonction P de N_{n+2} associe sa dérivée seconde, notée P''.

2) a. Pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, déterminer $v(f_k)$ en fonction de certains des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice A de v relativement aux bases C et $\mathcal{B}$.

   b. En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n.

   c. Simplifier, pour tout réel x et pour tout entier naturel k, la somme $\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

   d. Justifier que le résultat de la quatrième question de la partie 1 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question 2c), la matrice A^{-1}.

   e. Vérifier cette dernière, dans le cas où $n = 2$ (les calculs devront figurer sur la copie).

3) On considère l'application w qui à tout élément P de P_n associe $w(P)$, où $w(P)$ est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)\,P(x)$.

   a. Montrer que w est un endomorphisme de P_n.

   b. Pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, déterminer $w(e_k)$.

   c. En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 2a).

   d. L'endomorphisme w est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de P_n ?

   e. Dans le cas $n = 2$, déterminer les sous-espaces propres de w.