



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur :

ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE ÉPREUVE :

**MATHÉMATIQUES**

Option scientifique

297

EDHECMATS

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

## Exercice 1

Dans cet exercice,  $m$  désigne un entier naturel non nul. On note  $id$  (respectivement  $\theta$ ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^m$  et on considère un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}^m$  vérifiant :  $(f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id) = \theta$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux complexes distincts.

1) a) Vérifier que  $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} ((f - \lambda_1 id) - (f - \lambda_2 id)) = id$ .

b) En déduire que :  $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 id)$ .

c) Conclure que  $f$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par  $n$  un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I$ , où  $I$  désigne la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  dont les éléments diagonaux valent 1.

2) Trouver une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$  telle que  $A^2 = -I$ .

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I$ .

a) Utiliser la première question pour montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$  et que ses valeurs propres sont  $i$  et  $-i$ .

b) Pour toute matrice  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ , on note  $\overline{M}$  la matrice  $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ .

On note  $E_i$  et  $E_{-i}$  les sous-espaces propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $i$  et  $-i$ .

Montrer que  $X \in E_i \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{-i}$ .

c) En déduire que, si  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une base de  $E_i$ , alors  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$  est une famille libre de  $E_{-i}$ . Conclure que  $\dim E_i = \dim E_{-i}$ .

d) Établir enfin le résultat demandé.

## Exercice 2

- 1) a) Montrer que l'on définit bien une unique suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ , à termes strictement positifs, en posant :  $u_1 = 1$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$ .
- b) Vérifier que  $u_2 = \frac{1}{3}$ , puis calculer  $u_3$ .
- 2) Montrer que la série de terme général  $u_n$  est divergente et donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_j$ .
- 3) a) Établir que :  $\forall n \geq 2, u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$ .
- b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- c) Donner un équivalent de  $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$  puis déterminer la nature de la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ .
- d) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- 4) a) Montrer que :  $\forall n \geq 2, u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}$ , où  $\binom{2n}{n}$  désigne le coefficient binomial  $\frac{(2n)!}{n!n!}$ .
- b) En utilisant la question 2), déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$ , puis montrer que :  $\binom{2n}{n} = o(4^n)$ .
- 5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que :  $\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right)$ .

## Exercice 3

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée  $\varphi$  et de fonction de répartition notée  $\Phi$ ).

On pose  $Z = \text{Sup}(X, Y)$  et l'on se propose de déterminer la loi de  $Z$ , ainsi que son espérance et sa variance.

1) a) Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

b) Vérifier que  $Z$  admet pour densité la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2) a) Rappeler la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

b) En déduire la convergence et la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

c) En remarquant que, pour tout réel  $x$ ,  $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ , montrer, grâce à une intégration par parties, que :  $\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

d) Montrer de même que :  $\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ .

En déduire que  $Z$  a une espérance et donner sa valeur.

3) a) Montrer que  $X^2$  et  $Z^2$  suivent la même loi.

b) Déterminer  $E(Z^2)$ , puis donner la valeur de la variance de  $Z$ .

## Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine  $O$ .

Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse  $k$  à l'instant  $n$ , alors, à l'instant  $(n+1)$  il sera sur le point d'abscisse  $(k+1)$  avec la probabilité  $\frac{k+1}{k+2}$  ou sur le

point d'abscisse 0 avec la probabilité  $\frac{1}{k+2}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  et l'on a donc  $X_0 = 0$ .

On admet que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et on pose  $u_n = P(X_n = 0)$ .

### Partie 1 : étude de la variable $X_n$ .

1) Vérifier que  $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$  puis donner la loi de  $X_1$ .

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ .

3) a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$ .

b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$ .

c) En remarquant que  $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$ , montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$ .

d) Retrouver ainsi les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$  puis déterminer  $u_2$  et  $u_3$ .

4) a) En remarquant que la relation obtenue à la question 3a) peut s'écrire sous la forme  $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$ , montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$ .

b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $E(X_n)$  sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite  $(u_n)$ .

c) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, donner la valeur de  $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$  et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

Déduire de ces deux résultats que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$ .

d) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{1}{n+1}$ . Déterminer ensuite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$ .

## Partie 2 : étude du premier retour à l'origine.

On note  $T$  l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que  $T$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . On convient que  $T$  prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en  $O$ .

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a  $T = 1$ . Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a  $T = 4$ .

1) a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , exprimer l'événement  $(T = k)$  en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables  $X_i$ .

b) Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ .

c) Déterminer les constantes  $a$  et  $b$  telles que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ .

En déduire que  $P(T = 0) = 0$ , puis interpréter ce dernier résultat.

2) La variable  $T$  a-t-elle une espérance ?

## Partie 3 : informatique.

1) Compléter les deux instructions manquantes pour que le programme Pascal suivant, dans lequel  $n$  est déclaré comme constante (ici  $n = 100$ ), calcule et affiche  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , ainsi que l'espérance de  $X_n$  qui sera stockée dans la variable  $e$ .

```
Program edhec_2006 ;
const n = 100 ;
var i, k : integer ;
    s, e : real ;
    u : array [0..n] of real ;
Begin
  u[0] := 1 ; writeln(u[0]) ; e := 0 ;
  For k := 1 to n do
  begin
    s := 0 ;
    For i := 1 to k do begin s := ----- ; u[k] := 1 - s ; end ;
    Writeln(u[k]) ;
    e := ----- ;
  end ;
  Writeln(e) ;
end.
```

2) a) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par  $T$  lors de l'expérience aléatoire étudiée.

On rappelle que, si  $k$  est un entier naturel non nul, l'instruction `random(k)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 0 et  $k-1$ .

```
Program edhec_2006bis ;
var T, hasard : integer ;
Begin
  Randomize ; T := 0 ;
  Repeat T := T + 1 ; hasard := random (-----) ; until (hasard = -----) ;
  Writeln (T) ;
end.
```

b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?