BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
297
EDHECMATS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

b) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leq I$.

c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\text{ et } L=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E.
On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.
2) a) Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.
   c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.
3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4) On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$

   a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.
   b) Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.
5) a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.
   b) Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

On rappelle que l'application, notée tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
On rappelle également que l'application qui à tout couple (M,N) de $E\times E$ associe le réel noté (M/N) défini par $(M/N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
On munit désormais E de ce produit scalaire.

6) a) Montrer que, pour tout couple (P,Q) de $E\times E$, $tr(PQ) = tr(QP)$.
   b) Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.
   c) En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi_A - Id)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_A + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2) À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.
3) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt$.

4) a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{2\,n^{n+1}}$.

b) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et dans les deux premières parties de ce problème, on considère une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. Trois joueurs notés A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue le premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc. Le gagnant est le premier des trois qui extrait la boule blanche.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note A_k (resp B_k, C_k) l'événement « A (resp B, C) gagne au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

On note A (resp B, C) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie ».

L'objectif de ce problème est de comparer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ selon le mode de tirage et, dans la troisième partie, avec une urne remplie aléatoirement.

Partie 1: les tirages se font avec remise de la boule tirée.

1) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $P(A_{3k+1})$, $P(B_{3k+2})$ et $P(C_{3k+3})$.

2) En déduire $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et vérifier que $P(A) > P(B) > P(C)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie 2 : les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1) Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $3k + 3 \le n$:

$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \dfrac{1}{n}$.

2) a) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = \dfrac{m+1}{3m+1}$, $P(B) = P(C) = \dfrac{m}{3m+1}$.

b) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 2$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = P(B) = \dfrac{m+1}{3m+2}$, $P(C) = \dfrac{m}{3m+2}$.

c) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 3$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$.

3) Conclure.

Partie 3 : les tirages se font sans remise dans une urne remplie aléatoirement.

L'urne est maintenant remplie de la façon suivante : on lance une pièce qui donne "pile" avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et "face" avec la probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang du premier "pile" obtenu lors de ces lancers.

Si N prend la valeur n ($n \in \mathbb{N}^*$), on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne.

1) a) En utilisant certains résultats de la partie 2, donner en fonction de m les valeurs de $P_{(N=3m+1)}(A)$, $P_{(N=3m+2)}(A)$ et $P_{(N=3m+3)}(A)$.

b) En déduire que $P(A) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+1} q^{3m} p$.

2) De la même façon, établir que $P(B) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m}{3m+1} q^{3m} p$.

3) Déterminer, toujours de la même façon, une expression analogue de $P(C)$.

4) Conclure.

Dans les trois questions suivantes, on cherche à déterminer une expression intégrale de $P(A)$.

5) a) Pour tout x de $[0,1[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, écrire explicitement $\sum_{m=0}^{n-1} x^{3m}$ en fonction de x et n.

b) En déduire que $\sum_{m=0}^{n-1} \dfrac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \dfrac{1}{1-x^3}\,dx - \int_0^q \dfrac{x^{3n}}{1-x^3}\,dx$.

c) Établir enfin que $\sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \dfrac{1}{1-x^3}\,dx$.

6) Montrer, de la même façon, que $\sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \dfrac{x}{1-x^3}\,dx$.

7) a) Déterminer les constantes a, b, c et d telles que, pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$\frac{m+1}{3m+1} = a + \frac{b}{3m+1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{3m+2} = c + \frac{d}{3m+2}.$$

b) En déduire que $P(A) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{p}{3q} \int_0^q \dfrac{2+x}{1-x^3}\,dx$.

8) Établir enfin que, lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, on a $P(A) \geq \dfrac{17}{24}$.

Partie 4

On décide de coder l'événement « on obtient la boule blanche » par le nombre 0.
On rappelle que la fonction random renvoie, pour un argument n de type integer (avec $n \geq 1$) un entier aléatoire compris entre 0 et $n-1$.

1) Compléter le programme Pascal suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans la partie 1 et en affiche le vainqueur.

```
Program edhec_2007 ;
Var   a, b, c, n : integer ;
Begin
Readln(n) ; Randomize ;
Repeat
a : = random(n) ;
If a = 0 then -------- else   begin b : = -------- ;
                                    If b = 0 then -------- else   begin c : = -------- ;
                                                                        If c = 0 then -------- ;
                                                                  end ;
                              end ;
until (a * b * c = 0) ;
End.
```

2) Modifier ce programme pour qu'il affiche qui est le vainqueur de ce jeu dans le cadre de la partie 2.