Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.

2) a) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.

b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos\frac{t}{2} \right).$$

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2}$.

3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1) a) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors on a bien $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, F et G, de E. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle alors symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par :

$$s(x) = x_F - x_G.$$

Déterminer s^2 et en déduire que $E = \operatorname{Ker} s \oplus \operatorname{Im} s$.

2) Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif (le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question).

a) Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.

b) Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.

(*i*) Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

(*ii*) Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} f$.

(*iii*) En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

c) Retrouver le résultat de la question 2b) en considérant la matrice de f dans une base bien choisie.

3) Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ ou encore $P = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_pX^p$, avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

a) Soit y un élément de $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

   (i) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.

   (ii) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$ puis déterminer y.

b) Établir que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$.

Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour "pile") ou F (pour "face"). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.

Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois "pile", le joueur ayant noté (P, F, P) a 2 prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.

Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1) Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On pose alors, pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2) On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

   a) Calculer $S_p + T_p$.

   b) Montrer que $S_p = T_p$.

   c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p, puis montrer que $r_p = \dfrac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

1) Montrer que $G_1(\Omega) = \left\{ \dfrac{n!}{j+1}, j \in [|0, n-1|] \right\}$.

2) a) Montrer que $P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

   b) Montrer que, pour tout j élément de $[|0, n-2|]$, $P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = 0$.

   c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = 0)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = 0) = (n-1)!\,(q_0)^{n-1}.$$

3) a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[|0, n-1|]$, on a :

$$P_{(X_1=k)}(G_1 = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}.$$

b) Établir que $\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = k)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = k) = (n-1)!\,\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4) Utiliser les questions 3b) et 3c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.

Dans cette partie J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2 :
$G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.

On pose, pour tout i de $\{1, 3, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1) a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $(p+1)$ prévisions correctes.

b) En déduire que $Y(\Omega) = [|p+1, 2p+1|]$.

2) Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3) Pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$, montrer que $P(Y = k) = 2\,q_k$.

4) Montrer que $G'(\Omega) = \{\frac{n!}{j+1}, j \in [|0, n-2|]\}$.

5) a) Établir que, pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$ et pour tout j élément de $[|0, n-1|]$, on a :

$$P_{(Y=k)}(G' = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}.$$

b) En déduire que, pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$, l'espérance de G conditionnellement à l'événement $(Y = k)$ est :

$$E(G' / Y = k) = n(n-2)!\,\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2\,n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $2^{n-1} > n$.

c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.