PROBLÈME EDHEC 2009

Problème

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

b) Utiliser la première question pour établir que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

→

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

1) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1-F(x)>0$.
On définit alors la fonction g par :

$$g(x)=\begin{cases}-f(x)\ln(1-F(x)) \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}.$$

2) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y.
3) Étude d'un cas particulier.
a) Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.
b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x)=-f(x)\ln(1-F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels positifs, définie par $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=1$.
On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(N=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.
On pose alors $Z=\operatorname{Sup}(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie que :
$\forall\omega\in\Omega$, $Z(\omega)=\operatorname{Max}(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$.

2) a) Montrer que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Z(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.
c) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.

PROBLÈME

Partie 1 : Préliminaire

Dans toute cette partie x est un élément de $[0,1[$.

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0,x]$. t est différent de 1 donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ appartient à } \mathbb{N}^* \text{ et si } t \text{ appartient à } x : \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,x],\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.

En intégrant on obtient : $\displaystyle\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Ce qui donne par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \big[-\ln|1-t|\big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -\ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ et $t^n \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}$.

x étant un élément de $[0,1[$, il vient en intégrant :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{(1-x)(n+1)}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1-x)(n+1)} = 0$. Par encadrement on obtient alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

d) Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right) = -\ln(1-x)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{x^p}{p} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

Exercice Montrer que le résultat vaut encore pour $x \in [-1,0[$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \dfrac{x^{n+1}}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\,\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Les séries de termes généraux $\dfrac{x^n}{n}$ et $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ étant convergentes, la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ est convergente.}}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ car les trois séries convergent.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\,(-\ln(1-x)) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = -x\,\ln(1-x) - \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^p}{p}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x\,\ln(1-x) - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} + x = -x\,\ln(1-x) - (-\ln(1-x)) + x = x + (1-x)\,\ln(1-x)$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x).}$$

Partie 2

---

1) Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$. F étant croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in [x_0, +\infty[, F(x) = 1$! !

f est continue sur $]0, +\infty[$. Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'(x) = f(x)$.

Or f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. Par conséquent F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$ car F est continue sur $\mathbb{R}$).

F étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et constante sur $[x_0, +\infty[$, une légère contradiction apparaît...

Ainsi il n'existe pas de réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) < 1$. Alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - F(x) > 0.}$$

2) Il convient de montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Une remarque préliminaire s'impose.

f étant nulle sur $]-\infty, 0[$: $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ -f(x)\,\ln(1 - F(x)) = -f(x)\,\ln(1) = 0 = g(x)$. Plus de doute :

$$\boxed{\boxed{\forall x \in \boxed{\mathbb{R}},\ g(x) = -f(x)\,\ln(1 - F(x)).}}$$

- Soit x un réel.

$0 < 1 - F(x) \leqslant 1$ donc $\ln(1 - F(x)) \leqslant 0$. $f(x) \geqslant 0$ donc $-f(x) \leqslant 0$. Alors $g(x) = -f(x)\,\ln(1 - F(x)) \geqslant 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$.

• $x \to 1 - F(x)$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Alors $x \to \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ donc f est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$. Il en est alors de même pour $-f$.

Donc, par produit, $g : x \to -f(x)\ \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

g est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

∇ *Remarque* *Ce qui précède montre que g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

g est aussi continue à droite en 0 car $-f$ et $x \to \ln(1 - F(x))$ sont continues sur $[0, +\infty[$.

Notons que $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Alors* $g(0) = -f(0)\ \ln(1 - 0) = 0$. *Rappelons que g est nulle sur $]-\infty, 0[$.*

Alors : $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$ *donc g est continue à gauche en 0.*

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}$. ∇

• g est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Montrons alors que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Cela revient à montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \big(-f(t)\big)\ \ln(1 - F(t))\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Utilisons pour cela une intégration par parties.

Soit H la restriction de F à $[0, +\infty[$. $\forall x \in [0, +\infty[,\ H(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et f est continue sur $[0, +\infty[$ donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ H'(x) = f(x)$.

∇ *Remarque* *L'utilisation de H s'impose (?!) car F n'est pas nécessairement dérivable en 0 ; $F'(x) = f(x)$ est donc un peu osé pour $x = 0$...* ∇

Posons $\forall x \in [0, +\infty[,\ u(x) = 1 - H(x)$. u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ u'(x) = -f(x)$.

Posons $\forall x \in [0, +\infty[,\ v(x) = \ln(1 - H(x))$. $x \to 1 - H(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et strictement positive. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, par composition v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. $\forall x \in [0, +\infty[,\ v'(x) = \dfrac{-f(x)}{1 - H(x)}$.

Soit A un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties (justifiée par ce qui précède) il vient :

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \Big(-f(t)\ \ln(1 - H(t))\Big)\,\mathrm{d}t = [(1 - H(x))\ \ln(1 - H(x))]_0^A - \int_0^A (1 - H(t))\ \frac{-f(t)}{1 - H(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1 - H(A))\ \ln(1 - H(A)) - (1 - H(0))\ \ln(1 - H(0)) + \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1 - H(A))\ \ln(1 - H(A)) - (1 - H(0))\ \ln(1 - H(0)) + F(A) - F(0).$$

$H(0) = F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $(1 - H(0))\ \ln(1 - H(0)) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1 - H(A))\ \ln(1 - H(A)) + F(A)$.

$\displaystyle\lim_{A \to +\infty}(1 - H(A)) = \lim_{A \to +\infty}(1 - F(A)) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0}(x \ln x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}\Big((1 - H(A))\ \ln(1 - H(A))\Big) = 0$.

Comme en plus $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} F(A) = 1$: $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty}\Big((1 - H(A))\ \ln(1 - H(A)) + F(A)\Big) = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

Ceci achève de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

g est positive sur $\mathbb{R}$, g est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Alors g est une densité de probabilité donc :

$$\boxed{g \text{ peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire } Y.}$$

3) a) Soit X_0 une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_0 est une densité de X_0, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$. Ainsi :

$$\boxed{\text{une variable aléatoire } X_0 \text{ suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.}}$$

b) Ici X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors f_0 est encore une densité de X. f et f_0 sont donc deux densités de X !

∇ *Remarque* *À priori (à priori seulement), rien ne permet de dire que f est f_0...* ∇

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_0(x) = \begin{cases} -f_0(x)\, \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f et f_0 diffèrent seulement en un nombre fini de points il en est alors de même de g et g_0.
Comme g_0 est positive sur $\mathbb{R}$ et que g est une densité de Y, g_0 est encore une densité de Y !

$\forall x \in [0, +\infty[, g_0(x) = -\lambda\, e^{-\lambda x}\, \ln(1 - (1 - e^{-\lambda x})) = -\lambda\, e^{-\lambda x}\, \ln(e^{-\lambda x})) = (-\lambda)\,(-\lambda x)\, e^{-\lambda x} = \dfrac{x^{2-1}\, e^{-\frac{x}{(1/\lambda)}}}{(1/\lambda)^2\, \Gamma(2)}$.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[,\ g_0(x) = 0$.

Alors Y suit la loi Gamma de paramètres $\dfrac{1}{\lambda}$ et 2. Ainsi $E(Y) = \dfrac{2}{\lambda}$ et $V(Y) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

$$\boxed{Y \text{ suit la loi Gamma de paramètres } \frac{1}{\lambda} \text{ et } 2,\ E(Y) = \frac{2}{\lambda} \text{ et } V(Y) = \frac{2}{\lambda^2}.}$$

Exercice *Montrer que $f = f_0$! En déduire que ceux qui n'ont pas pris de précaution avaient raison... ! Comme disait ma grand-mère il n'y a de la chance que pour la canaille...*

Partie 3

1) $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{r} u_n = \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{r} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{r+1}$. Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} u_n = 1$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.}$$

2) a) Soit x un réel. Montrons que $Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Max}\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\right) \leqslant x\}$.

Comme $\Big(\{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}$.

Alors : $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(Z^{-1}(]-\infty, x]) \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\right)$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Max}\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\right) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\right)$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Max}\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\right) \leqslant x \text{ et } N(\omega) = n\Big\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Max}\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\right) \leqslant x \text{ et } N(\omega) = n\Big\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) \leqslant x,\ X_1(\omega) \leqslant x,\ \dots, X_n(\omega) \leqslant x,\ N(\omega) = n\Big\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leqslant x\} \cap \cdots \cap \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\Big)$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(X_0^{-1}(]-\infty, x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty, x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty, x]) \cap N^{-1}(\{n\})\Big)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

X_0, X_1, ..., X_n, N sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $X_0^{-1}(]-\infty, x])$, $X_1^{-1}(]-\infty, x])$, ..., $X_n^{-1}(]-\infty, x])$, $N^{-1}(\{n\})$ sont des éléments de la tribu $\mathcal{A}$.

Alors $X_0^{-1}(]-\infty, x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty, x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty, x]) \cap N^{-1}(\{n\})$ est un élément de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable).

Ainsi $Z^{-1}(]-\infty, x])$ est réunion dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ c'est donc un élément de $\mathcal{A}$ et ceci pour tout élément x de $\mathbb{R}$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{X \text{ est une variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, P).}$$

Soit x un réel. $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(Z^{-1}(]-\infty, x]))$.

$F_Z(x) = P\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(X_0^{-1}(]-\infty, x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty, x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty, x]) \cap N^{-1}(\{n\})\Big)\right)$.

Par indépendance et incompatibilité il vient :

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(P(X_0^{-1}(]-\infty, x])) \, P(X_1^{-1}(]-\infty, x])) \cdots P(X_n^{-1}(]-\infty, x])) \, P(N^{-1}\{n\}) \Big).$$

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(P(X_0 \leqslant x) \, P(X_1 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) \, P(N = n) \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((F(x))^{n+1} \, u_n \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)}.}$$

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

$F(x) \in [0, 1[$ donc, d'après le préliminaire : $F_Z(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)} = F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x))$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F_Z(x) = F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x))}$$

Pour faire plaisir au concepteur :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \ F_Z(x) = F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x))}$$

c) • Nous avons déjà vu que F, $x \to 1 - F(x)$ et $x \to \ln(1 - F(x))$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Alors $x \to F(x) + (1 - F(x)) \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est continue au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = f(x)$.

$1 - F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par produit $(1 - F) \ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par somme $F + (1 - F) \ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ F_Z'(x) = f(x) - f(x) \ln(1 - F(x)) + (1 - F(x)\, \dfrac{-f(x)}{1 - F(x)} = -f(x) \ln(1 - F(x)) = g(x)$.

Alors g est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_z' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est une densité de } Z.}$$
