PROBLÈME

Partie I

Q1 a) $u_0=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^0\,dt=\int_0^{\pi/2}1\,dt=\frac{\pi}{2}$. $u_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt=[-\cos t]_0^{\pi/2}=-\cos\frac{\pi}{2}-(-\cos 0)=1$.

$u_0=\frac{\pi}{2}$ et $u_1=1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_n-u_{n+1}=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,dt-\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{n+1}\,dt=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n(1-\sin t)\,dt$.

$\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\leq\sin t\leq 1$ donc $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^n(1-\sin t)\geq 0$.

Comme $0\leq\frac{\pi}{2}$, $u_n-u_{n+1}=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n(1-\sin t)\,dt\geq 0$; $u_n\geq u_{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq u_{n+1}$. $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^n\geq 0$ et $\frac{\pi}{2}\geq 0$ donc $u_n=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,dt\geq 0$.

Supposons que $u_n=0$. Alors :

1) $\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,dt=0$

2) $t\mapsto(\sin t)^n$ est continue et positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

3) $0\neq\frac{\pi}{2}$

Alors $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^n=0$. Or $(\sin\frac{\pi}{2})^n=1$. Ainsi il est impossible que u_n soit nul.

donc $u_n\geq 0$ et $u_n\neq 0$. Ainsi $u_n>0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v(t) = -\cos t$.
u et v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(t) = (n+1)\cos t (\sin t)^n$ et $v'(t) = \sin t$.
ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$$u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} (\sin t)\,dt = \underbrace{\left[(\sin t)^{n+1}(-\cos t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos t\,(\sin t)^n(-\cos t)\,dt.$$

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1-\sin^2 t)\,dt.$$

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\,dt = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}.$$

Donc $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Montrons ce résultat par récurrence.

- $u_{2\times 0} = u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{(1\times 0!)^2}\frac{\pi}{2} \overset{0!=1}{=} \frac{\pi}{2}$.

  Donc $u_{2\times 0} = \frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2}\frac{\pi}{2}$. La propriété est vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

  $(2n+2)u_{2n+2} = (2n+1)u_{2n}$ d'après a).

Alors $u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^2(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

$u_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{[2(n+1)2^n n!]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$; $u_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2} = (n+1)\,u_n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2}\,u_{n+1} = (n+1)\,u_n\,u_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1}\,u_n$.

Donc la suite $\left((n+1)\,u_{n+1}\,u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\,u_{n+1}\,u_n = (0+1)\,u_{0+1}\,u_0 = 1\times u_1\times u_0 = u_1 u_0 = 1\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\,u_{n+1}\,u_n = \frac{\pi}{2}.$$

d) $\forall n\in\mathbb{N},\ (2n+1)\,u_{2n+1}\,u_{2n} = \frac{\pi}{2}$ et $u_{2n} > 0$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\,u_{2n}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(2n+1)\dfrac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n+1} = \frac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q3 a) $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2} = (n+1)\,u_n$ et $u_n \neq 0$.

$$\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1.$$

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n > 0$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$.

Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Ce qui précède montre que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\,u_{n+1}\,u_n = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\,u_n\times u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,u_n^2$; $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$; $|u_n| = \sqrt{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = |u_n|$.

Finalement $\underline{\underline{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}}$.

PARTIE II

Q1 Soit x un réel.

- $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

- $$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \underset{t \to -1}{\sim} \frac{e^{x}}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+t)^{1/2}} \text{ et } \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t)^{1/2}}.$$

- $\forall t \in]-1,0]$, $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ et $\forall t \in [0,1[$, $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{1/2}}$ convergent car $\frac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{\sqrt{2}} \frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ et

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dt}{(1-t)^{1/2}}$ convergent.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge. Ainsi : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge. Alors

$\underline{\underline{\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge et ceci pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.}}$

Q2 $\boxed{\text{A partir de maintenant } x \text{ est un réel strictement positif.}}$

$\forall t \in [0,1[$, $0 \leq \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (car $\forall t \in [0,1[$, $e^{-tx} \leq 1$ puisque $x > 0$).

$\forall t \in [0,1[$, $0 \leq \dfrac{1}{\pi} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Comme $I(x)$ et $I(0)$ existent : $\int_0^1 \frac{1}{\pi}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ existent.

Alors en intégrant entre 0 et 1 l'encadrement précédent il vient :

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Posons $M = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. M est une constante et $0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq M$... pour tout $x \in]0,+\infty[$

b) Soit $u \in [0,\frac{1}{2}]$. $0 < \sqrt{1-u} < 1$ donc $\underline{1 < \frac{1}{\sqrt{1-u}}}$.

Soit $u \in [0,\frac{1}{2}]$. $(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} = \frac{(1-u)(1+u)^2-1}{1-u} = \frac{(1-u)(1+u^2+2u)-1}{1-u}$.

$$(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u}(1+u^2+2u-u-u^3-2u^2-1) = \frac{1}{1-u}(u-u^2-u^3) = \frac{u}{1-u}(1-u-u^2).$$

$$(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} = \frac{u}{1-u}\left[1+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}+u+u^2\right)\right] = \frac{u}{1-u}\left[\frac{5}{4}-\left(u+\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

$u \in [0,\frac{1}{2}]$ donc $(u+\frac{1}{2}) \in [\frac{1}{2},1]$. Alors $(u+\frac{1}{2})^2 \in [\frac{1}{4},1]$.

Par conséquent $\frac{5}{4}-(u+\frac{1}{2})^2 \geq 0$. Comme $\frac{u}{1-u} \geq 0$: $(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} \geq 0$.

Alors $0 \leq \frac{1}{1-u} \leq (1+u)^2$ donc $\underline{\sqrt{\frac{1}{1-u}} \leq \sqrt{(1+u)^2} = |1+u| = 1+u}$ car $1+u \geq 0$.

Par conséquent $\forall u \in [0,\frac{1}{2}]$, $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u$

Q3 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1/\sqrt{2})} e^{-\frac{(t-0)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}}$.

Alors 1) φ est une densité d'une variable aléatoire Z qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $1/2$.

2) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$.

3) φ est paire sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto t^2\varphi(t)$ aussi !

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $E(Z^2)$ donc $\underbrace{V(Z)}_{1/2}+\underbrace{(E(Z))}_{0}{}^2$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.

Alors $\int_0^{+\infty}t^2\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $1/4$.

donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt$ est convergente et vaut $1/2$. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^2e^{-t^2}dt$ est convergente et vaut $1/4$.

Finalement $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

b) $t\mapsto\sqrt{tx}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. ceci justifie le changement de variable $u=\sqrt{tx}$ dans ce qui suit. Soit $\varepsilon\in]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^1\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=\sqrt{tx}}{=} \int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}}\frac{e^{-u^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}}\times\frac{2u}{x}\,du=\int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}}\frac{2}{\sqrt{x}}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du.$$

$\sqrt{t}=\frac{u}{\sqrt{x}}$; $t=\frac{u^2}{x}$

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sqrt{\varepsilon x}=0$. de plus $\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du$ existe.

Alors $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du$.

donc $\int_0^1\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt$ converge et vaut $\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du$.

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\neq0$ donc $\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Alors $\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$

c) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. $\int_\varepsilon^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\frac{u}{\sqrt{x}}\,\frac{2u}{x}\,du = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2}\,du$.

$u=\sqrt{tx}$

$\sqrt{t}=\frac{u}{\sqrt{x}}$ et $t=\frac{u^2}{x}$

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sqrt{\varepsilon x}=0$ et $\int_0^{\sqrt{x}} u^2e^{-u^2}du$ existe alors $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}u^2e^{-u^2}du$.

donc $\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}u^2e^{-u^2}du$.

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}u^2e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{4}\neq 0$ donc $\frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}u^2e^{-u^2}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Alors $\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

Q4 a) $t\mapsto 1+t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. ceci justifie le changement de variable $u=1+t$ dans ce qui suit.

Soit $\varepsilon\in]-1,0[$.

$$\int_\varepsilon^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{1+\varepsilon}^1 \frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,du.$$ $\lim_{\varepsilon\to-1^+}(1+\varepsilon)=0$ et $\int_{-1}^0\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

$u=1+t$

$t=u-1$ et $-t=1-u$

Alors $\int_0^1 \frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,du$ converge et $\int_{-1}^0\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1\frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,du$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1\frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,du = e^x\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{2u-u^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{2}}}$$

Finalement $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{e^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du.$

b) $\forall u\in]0,1]$, $1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\leqslant 1+\frac{u}{2}$ d'après Q2b) $(u\in]0,1]\Rightarrow\frac{u}{2}\in]0,\frac{1}{2}])$.

et $\forall u\in]0,1]$, $\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\geqslant 0$.

donc $\forall u\in]0,1]$, $\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\leqslant\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\leqslant\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}(1+\frac{u}{2})=\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}+\frac{1}{2}e^{-ux}\sqrt{u}.$

De plus $\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du$, $\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du$ et $\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du$ existent. Alors

$\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du\leqslant\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du\leqslant\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du$ car $0\leqslant 1$.

$$\text{Alors}\quad\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}\leqslant\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}\leqslant\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}+\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}du\qquad(*)$$

De plus 1) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}=1$ d'après Q3b.

2) $\displaystyle\frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}\underset{x\mapsto+\infty}{\sim}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}=\frac{1}{2x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{2x}=0.$

donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}+\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}\right)=1+\frac{1}{2}\times 0=1.$

Alors (*) et le théorème d'encadrement donnent : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}=1.$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du\underset{x\mapsto+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$

Or $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_{0}^{1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du$.

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{x}} = \frac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} = \frac{e^x \times \pi}{\sqrt{2\pi x}}$.

donc $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right) = +\infty$.

Or $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est bornée sur $]0,+\infty[$ comme nous l'avons vu dans Q 2 a)

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)$.

donc $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{0}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Ainsi $\displaystyle I(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Par transitivité $\displaystyle I(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$

PARTIE 3

(Q1) $(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc la formule des probabilités totales donne : $\displaystyle P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=Y\}\cap\{X=k\})$.

$\displaystyle P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=k\}\cap\{Y=k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty}(P(X=k)P(Y=k))$ car X et Y sont indépendantes.

$\displaystyle P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\right)$. $\displaystyle P(X=Y) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\right)e^{-2\lambda}$.

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Q2 a) Soit u un réel compris entre 0 et $-tx$.

1er cas. $t\in[-1,0[$. Alors $0<-t\leq 1$ et $x\in]0,+\infty[$ donc $0<-tx\leq x$.
Par conséquent $u\leq x$ car $u\in[0,-tx]$. donc $e^u\leq e^x$.

2ème cas. $t\in[0,1]$. Alors $-t\leq 0$ donc $-tx\leq 0$ car $x>0$.
Par conséquent $e^u\leq 1 \underset{\uparrow\, x>0}{\leq} e^x$; $e^u\leq e^x$.

Pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a : $e^u\leq e^x$.

$\varphi : u\mapsto e^u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}=\varphi$. Soit $n\in\mathbb{N}$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ, à l'ordre n, entre 0 et $-tx$
donne : $\left|\varphi(-tx)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-tx-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right|\leq\frac{|-tx-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{u\in\overleftrightarrow{[0,-tx]}}|\varphi^{(n+1)}(u)|$

Ainsi $\left|e^{-tx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-tx)^k}{k!}\times 1\right|\leq\frac{|tx|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{u\in\overleftrightarrow{[0,-tx]}}e^u$

$$\left|e^{-tx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leq\frac{|tx|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{u\in\overleftrightarrow{[0,-tx]}}e^u\leq\frac{|tx|^{n+1}}{(n+1)!}e^x$$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$.

$t\mapsto\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$.

$\forall t\in[0,1[$, $0\leq\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. La $I(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ dt converge donc

$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge. Ceci donne la convergence de $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Soit $\varepsilon\in]0,\frac{\pi}{2}[$. $t\mapsto\sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=\sin t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^\varepsilon (\sin t)^\ell dt = \int_0^\varepsilon \frac{(\sin t)^\ell}{\cos t}\cos t\,dt = \int_0^\varepsilon \frac{(\sin t)^\ell}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt \underset{u=\sin t}{=} \int_0^{\sin\varepsilon} \frac{u^\ell}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$$

Or $\lim\limits_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}} \sin\varepsilon = 1$ et $\int_0^1 \frac{u^\ell}{\sqrt{1-u^2}}du$ converge. Alors en faisant tendre ε vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures il vient : $u_\ell = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\ell dt = \int_0^1 \frac{u^\ell}{\sqrt{1-u^2}}du = \int_0^1 \frac{t^\ell}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = u_k$.

<u>Remarque</u>. Soit $k\in\mathbb{N}$. $t\mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ a la parité de k sur $]-1,1[$. Alors

1) $\int_{-1}^0 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

2) $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge également et vaut $2\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ si k est pair et 0 si k est impair.

c) Soit $(\alpha,\beta)\in]-1,1[^2$ tel que $\alpha<\beta$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\left|e^{-tx} - \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!}\right| \leq \frac{|tx|^{n+1}}{(n+1)!}e^{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\geq 0$.

Alors $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{x}\frac{|t|^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$.

Alors $\left|\int_\alpha^\beta \left[\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right]dt\right| \leq \int_\alpha^\beta \left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt \leq \frac{|x|^{n+1}e^{x}}{(n+1)!}\int_\alpha^\beta \frac{|t|^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Donc $\left|\int_\alpha^\beta \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!}\int_\alpha^\beta \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt\right| \leq \frac{|x|^{n+1}e^{x}}{(n+1)!}\int_\alpha^\beta \frac{|t|^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad (**)$

1) $\int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et vaut $\pi I(x)$.

2) Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et vaut $2\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ donc $2u_k$ si k est pair et 0 si k est impair

3) $\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge donc $\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\int_{-1}^0 \frac{-t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ convergent.

Alors $\int_0^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\int_{-1}^0 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ convergent donc $\int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

ces trois points permettent de faire tendre α vers -1 et β vers 1 dans $(*\alpha)$.

Alors $\left|\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\pi I(x)} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{=2u_k \text{ si } k \text{ est pair et } 0 \text{ si } k \text{ est impair.}}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}e^{x}}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$\left|\pi I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!}\, 2u_{2k}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}e^{x}}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{\text{par parité.}}{=} \frac{|x|^{2n+1}e^{x}}{(2n+1)!}\, \underbrace{2\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{2u_{2n+1}}.$$

En divisant par π il vient :

$$\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\, 2u_{2k}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}e^{x}}{\pi(2n+1)!}\, 2u_{2n+1} \overset{x>0}{=} \frac{2x^{2n+1}e^{x}}{\pi(2n+1)!}\, u_{2n+1}.$$

or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\pi}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\, 2u_{2k} \underset{\text{I Q2 b)}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\, 2 \times \frac{(2k)!}{(2^k \times k!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{x^{2k}}{(2^k \times k!)^2} = \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}\right| \leq \frac{2x^{2n+1}e^{x}}{\pi(2n+1)!}\, u_{2n+1}$.

La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2x^{2n+1}e^{x}}{\pi(2n+1)!}\, u_{2n+1}\right) = 0$. Il vient alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = I(x)$

Alors 1) la série de terme général $\frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$ converge.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = I(x)$

(Q3) $P(X=Y) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}\right) e^{-2\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}\right) e^{-2\lambda} = I(2\lambda)\, e^{-2\lambda}$.

$I(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ donc $I(2\lambda) \underset{\lambda\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^{2\lambda}}{\sqrt{2\pi \times 2\lambda}} = \frac{e^{2\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

Alors $I(2\lambda) \underset{\lambda\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^{2\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{-2\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

$$\underline{\underline{P(X=Y) \underset{\lambda\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}}}.$$