EXERCICE 3

Q1 • $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f(x)=0$.

• f est donc définie et positive sur IR

• $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$ est continue sur IR^* et $x \mapsto 0$ est continue sur IR donc f est continue sur $]-\infty,-1]$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$. Alors f est au moins continue sur $IR-\{-1,1\}$ donc sur IR, privé d'un ensemble fini de points.

• $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A f(t)\,dt = \int_1^A \frac{dt}{2t^2} = \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A}$.

Alors $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Comme f est paire sur IR, $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

f est nulle sur $]-1,1[$ donc $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ converge et vaut 0.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}$ donc 1.

Ceci achève de montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Q2 $\forall x \in IR$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Soit $x \in IR$.

1er cas. $x \in]-\infty,-1]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{2t^2} = \lim_{A\to-\infty} \left[-\frac{1}{2t}\right]_A^x = \lim_{A\to-\infty} \left[-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2A}\right] = -\frac{1}{2x}.$$

2ème cas. $x \in]-1,1[$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

3ème cas. $x \in [1,+\infty[$. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{dt}{2t^2}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right) = 1 - \frac{1}{2x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{si } x \in]-\infty,-1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Q3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq x\right) = P(S_n \leq nx) = P(\sup(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq nx)$

$G_n(x) = P(\{X_1 \leq nx\} \cap \{X_2 \leq nx\} \cap \dots \cap \{X_n \leq nx\}) = P(X_1 \leq nx) P(X_2 \leq nx) \dots P(X_n \leq nx)$.

$G_n(x) = (F(nx))^n$. $\leftarrow$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont pour fonction de répartition F

$nx \in]-\infty,-1] \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{n}[$, $nx \in]-1,1[$, $x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ et

$nx \in [1,+\infty[\Leftrightarrow x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$.

Alors $G_n(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{1}{n}] \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{1}{n}] \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[\\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]-\infty, 0]$.

__1er cas__. $x \in]-\frac{1}{n}, 0]$. $G_n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$!

__2e cas__. $x \in]-\infty, -\frac{1}{n}]$. Alors $G_n(x) = \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n$.

$x \leq -\frac{1}{n}$; $2nx \leq -2$; $-2nx \geq 2 > 0$; $\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2nx} > 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n$.

On a encore $G_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in]-\infty, 0], \quad G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}.$

b) Soit $x \in]0, +\infty[$. $\quad Ent(\frac{1}{x}) \geq 0$

Posons $n_0 = Ent(\frac{1}{x}) + 1$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. Notons que $n \geq n_0 \geq 1$.

$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq Ent(\frac{1}{x}) + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{x} \underset{x>0 \text{ et } n>0}{\Rightarrow} x > \frac{1}{n}$

Si x est un réel strictement positif il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \frac{1}{n}$.

En reprenant les notations précédentes si $n \geq n_0$ alors $x \in]\frac{1}{n}, +\infty[$ donc $G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^n$.

$\forall x \in]0, +\infty[, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^n.$

Q5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas.. $x \in]-\infty, 0]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq G_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Par encadrement on dit c'est $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$.

2ème cas.. $x \in]0, +\infty[$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^n.$

Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. $x > \frac{1}{n}$; $1 > \frac{1}{nx}$ car $x > 0$. $\frac{1}{2} > \frac{1}{\ln x}$; $\frac{1}{\ln x} < \frac{1}{2} < 1$.

donc $1 - \frac{1}{\ln x} > 1$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ G_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{1}{\ln x})}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{\ln x}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)\right)=-\frac{1}{2x}$. Comme la fonction exponentielle est continue en $-\frac{1}{2x}$:

$\lim_{n\to+\infty} G_n(x)=\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)}=e^{-\frac{1}{2x}}$. Ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0]\\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\end{cases}.$$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0]\\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$.

- G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc $\lim_{x\to-\infty} G(x)=0$.

  $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}\right)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} G(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2x}}=1$ $\quad\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$.

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$.

  1er cas. $x<y\leq 0$. Alors $G(x)=G(y)=0$ donc $G(x)\leq G(y)$

  2e cas. $x\leq 0<y$. Alors $G(x)=0\leq e^{-\frac{1}{2y}}=G(y)$; $G(x)\leq G(y)$.

  3e cas. $0<x<y$. Alors $\frac{1}{2x}>\frac{1}{2y}$; $-\frac{1}{2x}<-\frac{1}{2y}$; $e^{-\frac{1}{2x}}\leq e^{-\frac{1}{2y}}$; $G(x)\leq G(y)$.

  donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x<y\Rightarrow G(x)\leq G(y)$; G est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to-\infty} G(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$ et G est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors nécessairement

  $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x)\in[0,1]$

- $x\mapsto 0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto e^{-\frac{1}{2x}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

  Alors G est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi 1) G est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

  2) G est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et continue à gauche en 0.

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = 0 = G(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\infty$

Ainsi G est continue à droite en 0. Donc G est continue en 0.

Finalement <u>G est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

ceci achève de montrer que <u>G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.</u>

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$.

Ainsi <u>la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.</u>

Q6 Notons H la fonction de répartition de $\frac{1}{Y}$. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{1}{Y}$ prend également ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\forall x \in \,]-\infty, 0]$, $H(x) = P\left(\frac{1}{Y} \leq x\right) = 0$. Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$H(x) = P\left(\frac{1}{Y} \leq x\right) = P\left(\frac{1}{x} \leq Y\right) = 1 - P\left(Y < \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{1}{x}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2(1/x)}}.$$

$x>0$ et Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

Y est une variable aléatoire à densité

$H(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi <u>$\frac{1}{Y}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.</u>