EDHEC 1998 Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; on rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \ldots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.
On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par : $Q = (X-1)P' - XP''$.

Partie I : étude de φ.

1) a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Pour tout j élément de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$.
   c. Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.
   d. En déduire que φ est diagonalisable.

2) Pour tout k élément de $[\![0, n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$ et on écrit $L_k = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, avec $a_p = 1$.
   a. Montrer que p = k, c'est-à-dire que L_k est de degré k.
   b. Déterminer L_0.
   c. Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont solutions.
   d. En déduire que : $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!\left[C_k^i\right]^2$.

3) On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
   Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$.

→

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1) P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\psi(P, Q) = (P / Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)\,dx.$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

b. Vérifier que l'intégrale définissant (P / Q) est convergente.

c. Montrer que ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$, montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t)\, g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t)\,dt.$$

3) Montrer que : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_k^{(i)}(0) = 0$. (f_k étant la fonction définie à la question I3)

4) Soient i et k deux entiers naturels.

a. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)\, f_k^{(k)}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j L_i^{(j)}(x)\, f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)\, f_k(t)\,dt.$$

b. En déduire que $\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t)\,dt$

c. Montrer que, pour le produit scalaire ψ, la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Montrer que $I_{k+1} = (k+1) I_k$, puis donner la valeur de I_k.
En déduire la norme de L_k, notée $\| L_k \|$, puis donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III : étude des racines de L_n.

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose $R(x) = \prod_{j=1}^{p} (x - x_j)$, où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n. On convient que $R(x) = 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}^+$.

2) On suppose dans cette question que $p < n$.

a. En remarquant que R est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $(R / L_n) = 0$.

b. En déduire que RL_n est le polynôme nul.

3) a. En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que $p = n$.

b. En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.

EDHEC 1999 Problème

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, ..., f_n$ définies par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
On appelle E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$.
On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de E_n.

2) a. Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

b. Montrer que d est un endomorphisme de E_n.

3) a. Vérifier que d est un automorphisme de E_n.

b. Justifier que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(\frac{1}{k!} f_k) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$.

c. En déduire, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, ..., f_n)$.

4) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale $I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\, dx$ converge, puis donner sa valeur en fonction de j.

5) Montrer que l'application qui à tout couple (f, g) de E_n associe :
$(f / g) = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^x dx$ est un produit scalaire sur E_n.
Pour tout f de E_n, on note désormais $\|f\|$ la norme de f.

Partie 2

1) On pose $E_{n-1} = \text{vect}(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$.

a. Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant :
$\|f_n - h\| = \underset{g \in E_{n-1}}{Inf} \|f_n - g\|$.

On pose désormais $h = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c. En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$:
$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0.$$

2) On considère la fonction P définie pour tout x réel par :
$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1)...(x+j) + (x+1)(x+2)...(x+n).$$

a. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(k) = 0$.

b. En déduire explicitement P, puis vérifier que $P(n) = n!$.

3) a. Montrer que $\|f_n - h\|^2 = (f_n - h / f_n)$.

b. En déduire la valeur de $m = \underset{(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in IR^n}{Inf} \int_0^{+\infty} (x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k)^2\, e^{-x}\, dx$.

EDHEC 2000 Problème

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté (. / .) défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u / u)}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.
Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu' un réel α tels que : pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on ait : $(u_i / u_j) = \alpha$.
La partie 1 permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie 2 étudie les propriétés d'une telle famille et la partie 3 propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

Partie 1

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout réel a, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à a. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1) a. J est-elle diagonalisable ?
   b. Calculer J^2 et en déduire les 2 valeurs propres de J.
2) a. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les deux valeurs propres de M_a.
   b. En déduire que M_a est inversible si et seulement si : $a \neq 1$ et $a \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

Partie 2

On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, et un réel α solutions du problème.

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.
   a. Montrer que $M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.
   b. En déduire la valeur maximale de n lorsque $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}$.
2) Étude du cas $\alpha = 1$.
   a. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j (avec $i \neq j$).
   À quelle condition a-t-on l'égalité ?
   b. En déduire que $n = 1$.
3) Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4), formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.
   a. Donner la valeur de α.
   b. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   c. Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

Partie 3

1) Donner une famille solution du problème posé, pour $n = 3$ et $\alpha = 0$.

2) On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$.

b. Trouver deux réels λ et μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.

EDHEC 2001 Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté (. / .) défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, (u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u/u)}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.
On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a, b, c)$ et on suppose que c est non nul.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $\varphi(u) = (yc - zb,\ za - xc,\ xb - ya)$.

1) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2) a. Vérifier que ω appartient à $\mathrm{Ker}\varphi$.
 b. Montrer que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre.
 c. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{vect}(\omega)$.

3) a. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $(\varphi(u) / \omega) = 0$.
 b. En déduire que : $\mathrm{Im}\,\varphi = (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\perp}$.

4) a. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $\mathrm{Ker}\,\varphi \times \mathrm{Im}\,\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.
 b. Montrer que $(u / \omega) = (u_1 / \omega)$.
 c. En déduire que $u_1 = \dfrac{(u/\omega)}{\|\omega\|^2}\,\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.

5) a. Montrer que $M^3 = -\|\omega\|^2 M$.
 b. En déduire que : $\forall v \in \mathrm{Im}\,\varphi,\ \varphi \circ \varphi(v) = -\|\omega\|^2 v$.
 c. Montrer finalement que : $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \varphi \circ \varphi(u) = -\|\omega\|^2 u + (u/\omega)\,\omega$.

EDHEC 2003 Exercice 3

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A.

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice J, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associe le réel $< A\,, B > = \mathrm{tr}({}^tA\ B)$.

1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

2) Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.

3) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2).

a. Déterminer une base orthonormale de E, notée (K_0, K_1, K_2) telle que, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i (avec bien sûr $J^0 = I$).

b. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}$.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, déterminer $< K_i\,, A >$ en fonction de certains des éléments de A.

c. On note p la projection orthogonale sur E. Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A.

d. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\, p$.

EDHEC 2010 Exercice 2

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté (x / y) et la norme de x est notée $\| x \|$.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda (x / u) u + x$.

1) Donner la dimension de $(\text{vect}(u))^\perp$.

2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

3) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

4) a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.

b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$.

c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

5) Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.

a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.

b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\text{vect}(u))^\perp$.

EDHEC 2011 Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :
$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$
   (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur , alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant :
$$(\mathcal{R}) \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$
   (a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathcal{R}$.
   Montrer que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $L_k = M_k$.
   (b) On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille obtenue (à partir de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
      i. Justifier, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.
      ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant $\mathcal{R}$.
   (c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.