ÉNONCÉS FICHIER 1

Exercice 1 $n \in [\![2,+\infty[\![$ et J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser J.

α et β sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

Exercice 2 **Matrices semblables**.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^n et A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 **Réduction d'un endomorphisme**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q2. Construire (en justifiant) une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 4 **Matrices semblables**.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q2. Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5 **Matrices semblables**

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres (définir une stratégie simple et claire pour traiter le problème).

Exercice 7 **Polynôme annulateur**.

Q1. $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Donner une expression simple de $Q(D)$.

Q2. A est une matrice <u>diagonalisable</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres distinctes de A et $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$. Montrer que $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi une matrice diagonalisable admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Q3. Enoncer un résultat analogue pour les endomorphismes.

Exercice 8 **CNS pour que deux endomorphismes digonalisables commutent**.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f a n valeurs propres distinctes.

Q1. Que dire des sous-espaces propres de f ?

Q2. Montrer que si : $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

Q3. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Exercice 9 **Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de polynm̂es**

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 10 **Trigonalisation simultanée de deux endomrorphismes**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g.

Q2. Trouver une base de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Exercice 11 A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $A^p = I_n$.

Montrer que : $A^2 = I_n$.

Exercice 12 **Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$**.

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.

a) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Montrer que nécessairement α vaut 1 ou -1.

b) En déduire que : $P = c(X-1)^p(X+1)^q$, avec c dans $\mathbb{R}^*$ et (p,q) dans $[\![0,n]\!]^2$.

Exprimer q et λ en fonction de p et de n.

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 13 **Réduction d'une matrice de rang 1**.

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduire pour le spectre de A ?

Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).

Q3. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, a\}$.

Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Exercice 14 **Réduction d'un endomorphisme de** $\mathbb{R}_n[X]$.

n est un élément de $[\![3,+\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3+3X)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 15 **Comparaison des spectres de** AB **et de** BA**.**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{Sp}(AB) = \operatorname{Sp}(BA)$

Exercice 16 **Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions**.

E est l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \text{ est dans }]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de E, injectif mais non surjectif.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Exercice 17 $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

u est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Q2. Pour tout f dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(f) = u \circ f$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 18 n est dans $\mathbb{N}^*$. $A = (a_{ij})$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = i$ si $i = j$.

Q1. λ est un réel. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda \notin [\![0, n-1]\!] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \cdots + \frac{1}{\lambda - (n-1)} = 1.$$

Q2 Trouver le nombre d'éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

Exercice 19 **Racines $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B et que B est triangulaire inférieure.

Montrer l'existence de trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.
