ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

MATHEMATIQUES I

Option générale

Vendredi 11 mai 1990 de 14h à 18h.

Le but du problème est de déterminer la probabilité pour qu'un entier naturel appartienne à certains sous-ensembles de $\mathbb{N}$, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'Analyse.

Dans tout le problème, on désigne par x une variable réelle appartenant à [0, 1[et les fonctions considérées sont définies uniquement sur [0, 1[. En particulier, les limites ou équivalents en 1 supposent x inférieur à 1.

PRELIMINAIRE

Etant données deux suites réelles à termes positifs (x_n) et (y_n), on pose:

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \dots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k .$$

b) En déduire que, si les séries Σx_n et Σy_n sont convergentes de sommes respectives X et Y, alors la série Σz_n est convergente de somme $Z = XY$.

PARTIE I

On considère dans cette partie les deux suites de nombres réels (u_n) et (J_n) définies respectivement par:

– $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{3.5.7 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \geq 1$.

– $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

1°) a) Etudier le sens de variation de la suite (J_n) et prouver sa convergence.

b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} pour $n \geq 2$.

c) Calculer J_0 et J_1. En déduire les valeurs de J_{2n+1} et J_{2n} en fonction de u_n.

2°) a) Déduire successivement des résultats précédents les inégalités:

$$(1) \qquad 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u_n^2}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} .$$

$$(2) \qquad 0 \leq u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \leq \frac{u_n}{2n+1} .$$

b) Déduire de (1) un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3°) Calculer l'intégrale suivante:

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2(t)} \qquad \left(\text{on pourra poser } \tan(t) = \sqrt{1-x} . \tan(u)\right).$$

4°) a) Démontrer que:

$$\sum_{k=0}^{n} J_{2k} x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2(t)} - x^{n+1} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t)dt}{1 - x\cos^2(t)} .$$

b) Etablir l'inégalité suivante:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t)dt}{1 - x\cos^2(t)} \leq \frac{J_{2n+2}}{1-x} .$$

c) En déduire que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1} .$$

5°) a) Etablir par récurrence que:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1} .$$

b) A l'aide du résultat préliminaire, en déduire que:

$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n x^n .$$

6°) En utilisant les inégalités (2), établir:

a) la convergence de la série:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n .$$

b) la double inégalité:

$$x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{\frac{3}{2}} S(x) \leq 1.$$

On donnera alors un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 1.

PARTIE II

A toute partie A de $\mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par:

$$\begin{cases} a_n = 1 & \text{si } n \in A. \\ a_n = 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

On pose alors, sous réserve d'existence de ces nombres:

$$f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad P(A) = \lim_{x \to 1} (1-x) f_A(x).$$

1°) Prouver que la série définissant $f_A(x)$ est convergente.
On notera S l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles P(A) existe.

2°) Etablir les propriétés suivantes:
a) Si A appartient à S, alors $0 \leq P(A) \leq 1$.
b) $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ appartiennent à S. On précisera $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.
c) Si A appartient à S, alors son complémentaire $\overline{A}$ appartient à S. On précisera $P(\overline{A})$ en fonction de $P(A)$.
d) Si A, B tels que $A \cap B = \emptyset$ appartiennent à S, alors $A \cup B$ appartient à S. On précisera $P(A \cup B)$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$.
On admettra désormais que ($\mathbb{N}$, S, P) est un espace probabilisé.

3°) Montrer que les parties A suivantes appartiennent à S et préciser $P(A)$:
a) A partie finie de $\mathbb{N}$.
b) $A = q\mathbb{N} = \{qk \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ où q est un entier naturel non nul.
c) $A = q\mathbb{N}+t = \{qk+t \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ où t et q sont deux entiers naturels avec $q \neq 0$.

4°) On se propose dans cette question d'établir que la partie C de $\mathbb{N}$ constituée des carrés d'entiers naturels non nuls appartient à S, et de calculer $P(C)$.
La suite (c_n) et la fonction f_C associées à C sont donc définies par:

$$\begin{cases} c_n = 1 & \text{si } n \in C \text{ (soit : } \exists\, k > 0,\ k^2 = n) \\ c_n = 0 & \text{si } n \notin C \end{cases} \quad \text{et} \quad f_C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$$

a) A l'aide de la question préliminaire, établir que:

$$\frac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}]\,.\, x^n$$

([a] désigne ici la partie entière de a, c'est à dire l'entier tel que $[a] \leq a < [a]+1$).

b) Démontrer la double inégalité suivante:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n - \frac{f_C(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

c) A l'aide des résultats de la partie I, en déduire un équivalent de fc(x) quand x tend vers 1. Prouver alors que C appartient à S et donner P(C).

5°) On admet dans cette question que la partie D de $\mathbb{N}$ constituée des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls appartient à S, et l'on se propose de majorer P(D).

La suite (d_n) et la fonction f_D associées à D sont donc définies par :

$$\begin{cases} d_n = 1 & \text{si } n \in D \quad \left(\text{soit : } \exists p > 0,\ \exists q > 0,\ p^2 + q^2 = n\right) \\ d_n = 0 & \text{si } n \notin D \end{cases}$$

$$\text{et} \quad f_D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

On note v(n) le nombre des couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que :

$$p^2 + q^2 = n.$$

a) Etablir que :

$$\left(f_C(x)\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n.$$

b) Etablir que :

$$f_D(x) \leq \left(f_C(x)\right)^2.$$

En déduire un majorant de P(D).

c) En comparant d_n et v(n), montrer que l'on a plus précisément :

$$2 f_D(x) \leq \left(f_C(x)\right)^2 + f_C\left(x^2\right).$$

En déduire un nouveau majorant de P(D).

****