D.S. 11 CONCOURS BLANC 1 M.II

Lundi 24 février 2003

Faire attention aux indications.

Dans tout le problème, on désigne par a un réel strictement positif et par K une fonction de [0, +∞[dans R de la forme:

$$K(x) = P(x).\exp\left(-\frac{x}{2a}\right) = P(x)\, e^{-\frac{x}{2a}}$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
L'objet du problème est la recherche des fonctions continues f de [0, +∞[dans R telles que l'on ait pour tout réel positif x:

$$(1) \qquad f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)\,dt.$$

Les trois parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

PRELIMINAIRE

V1

On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $J_n(a)$ définie par:

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t}{a}\right)dt.$$

En raisonnant par récurrence sur n, établir la convergence de cette intégrale et préciser sa valeur en fonction de n et a.

Au choix

V2 utiliser un résultat de cours pour obtenir (aussi rapidement que proprement) l'existence et la valeur de :

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt.$$

PARTIE I

Dans toute cette partie, on suppose que P(x) = 1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ K(x) = e^{-x/2a}$.

1°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel c tel que f = cK.

2°) On considère réciproquement une fonction f = cK, où c est un nombre réel donné.

Evaluer pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) - K(x) - \int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)\,dt$ (on justifiera l'existence de l'intégrale).

En déduire que f est solution de (1) ssi $c = 1 + ac$.

3°) Etudier, selon les valeurs prises par a, l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

c'est le texte !

PARTIE II

Dans toute cette partie, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que $P(x) = \lambda a + x$.

1°) Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a}\right) \quad ; \quad \phi_1(x) = \frac{x}{a}\exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

a) Montrer que (ϕ_0, ϕ_1) est une base de E.

b) (V1) b) Soient ϕ un élément de E, et ψ la fonction définie pour $x \geq 0$ par:

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\phi(t)dt.$$

- Prouver que cette intégrale $\psi(x)$ est convergente, et montrer que ψ est un élément de E.

Au choix (je conseille V2)

b) (V2) → i) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi_0(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\,\phi_0(t)\,dt$ existe et vaut : $a^2(\lambda+1)\,\phi_0(x) + a^2\phi_1(x)$.

ii) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi_1(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\,\phi_1(t)\,dt$ existe et vaut : $a^2(\lambda+2)\,\phi_0(x) + a^2\phi_1(x)$.

iii) $\phi \in E$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\,\phi(t)\,dt$ existe, montrer que $\psi \in E$ (utiliser i) et ii)...et faire simple).

c) Montrer que l'application $u: \phi \in E \to u(\phi) = \psi \in E$ est un endomorphisme de E. ← faire propre et simple.
Etablir que sa matrice dans la base (ϕ_0, ϕ_1) est de la forme $a^2 M(\lambda)$ où $M(\lambda)$ est une matrice ne dépendant que de λ que l'on explicitera.
u est-il un automorphisme de E?

2°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E.

3°) Réciproquement $f = \alpha\phi_0 + \beta\phi_1$ appartient à E.

a) Montrer que f vérifie (1) si et seulement si : $\begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\alpha + a^2(\lambda+2)\beta = -\lambda a \\ a^2\alpha + (a^2-1)\beta = -a \end{cases}$

b) Résoudre et discuter le système précédent

c) __Facultatif__ : Représenter dans le plan l'ensemble des couples (a^2, λ) pour lesquels l'équation (1) n'a pas de solution (on portera a^2 en abscisse et λ en ordonnée).

PARTIE III

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 3a^2 - 4ax + x^2$.

1°) On considère la matrice M définie par:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M (avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).

b) Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
(On choisira à chaque fois un vecteur propre dont la 3° composante est égale à 1).

c) En déduire une matrice inversible P telle que:

$$M = P.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.P^{-1}.$$

d) Calculer l'inverse de la matrice P.

$$\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

2°) On considère les trois suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 6w_n & \text{et} \quad u_0 = 3. \\ v_{n+1} = -u_n + 2w_n & \text{et} \quad v_0 = -2. \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n + 2w_n & \text{et} \quad w_0 = 1. \end{cases}$$

a) A l'aide du résultat précédent, expliciter u_n, v_n, w_n.

b) Etudier la convergence et calculer les sommes éventuelles U, V, W des trois séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 0} a^{3n} u_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} v_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} w_n .$$

$$\frac{1}{9}\left[4 \times 4^n + 25 - 2(-2)^n\right]$$

$$\frac{1}{9}\left[-15 - 3(-2)^n\right]$$

$$\frac{1}{9}\left[2 \times 4^n + 5 + 2(-2)^n\right]$$

3°) On définit une suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = K$, puis:

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t) g_n(t)\,dt$$

et l'on pose alors:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

a) Prouver par récurrence que g_n est bien définie et qu'il existe trois nombres réels α_n, β_n, γ_n tels que l'on ait pour tout réel positif x:

$$g_n(x) = a^{3n}\left(\alpha_n a^2 + 2\beta_n ax + \gamma_n x^2\right)\exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

A l'aide des résultats précédents, on explicitera les expressions de α_n, β_n, γ_n.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel positif x, on a:

$$f_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t) f_n(t)\,dt.$$

4°) On suppose que $4a^3 < 1$ et l'on définit pour tout réel positif x:

$$L(x) = \left(Ua^2 + 2Vax + Wx^2\right)\exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

a) Montrer que, pour tout réel positif x, la suite $(f_n(x))$ converge et exprimer sa limite en fonction de L(x).

b) Montrer que la fonction L est solution de (1).

5°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle est nécessairement de la forme:

$$f(x) = \left(Aa^2 + 2Bax + Cx^2\right)\exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

6°) On considère réciproquement la fonction f définie par:

$$f(x) = \left(Aa^2 + 2Bax + Cx^2\right)\exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

a) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si A, B, C vérifient:

$$\left(I_3 - a^3 M\right)\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad avec : \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une solution unique et quelle est alors cette solution?

7°) Etudier, selon les valeurs prises par a, l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.