ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1994

Option générale

MATHEMATIQUES 1

Jeudi 19 mai 1994 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

On désigne par a et b deux nombres réels strictement positifs, et l'on considère l'intégrale I(a, b) définie par:

$$I(a,b) \;=\; \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Le problème a pour objet d'exprimer cette intégrale I(a, b) à l'aide de la fonction Γ définie pour tout nombre réel strictement positif p par:

$$\Gamma(p) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{p-1}dt.$$

PARTIE I

On étudie dans cette partie préliminaire l'intégrale impropre $\Gamma(p)$, avec $p > 0$.

1°) <u>Convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ avec $p > 0$.</u>

a) Déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de la fonction $t \to e^{-t}\,t^{p+1}$.
En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \to e^{-t}\,t^{p-1}$ sur $[1, +\infty[$.

b) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à $]0, 1]$ la double inégalité:

$$0 \;\leq\; \int_x^1 e^{-t}\,t^{p-1}dt \;\leq\; \frac{1}{p}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \to e^{-t}\,t^{p-1}$ sur $]0, 1]$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ pour tout nombre réel $p > 0$.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise-Yvelines ;
membre de la Fesic

) Expression de $\Gamma(p+1)$ pour p entier naturel.

A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction $\Gamma(p)$.

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(p+1)$ lorsque p est un entier naturel.

ARTIE II

ı désigne dans cette partie par p un nombre réel strictement positif, par x un nombre əl tel que $0 \leq x < 1$, et l'on considère la série:

$$g_p(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1}x^n.$$

) Convergence de la série définissant $g_p(x)$.

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \to n^{p+1}x^n$ lorsque x est fixé dans ıtervalle $[0, 1[$.

En déduire la convergence de la série définissant $g_p(x)$ lorsque $0 \leq x < 1$.

ɹe vaut $g_p(0)$? Peut-on définir $g_p(x)$ pour $x = 1$?

) Etude des cas particuliers p = 1 et 2.

Donner l'expression (sans signe Σ) de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ pour $0 \leq x < 1$.

Donner le sens de variation, la limite et un équivalent de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ lorsque x nd vers 1 ($x < 1$).

) Etude de la variation de g_p sur $[0, 1[$.

Comparer $g_p(x)$ et $g_p(y)$ lorsque $0 \leq x \leq y < 1$.

ı déduire le sens de variation de la fonction g_p sur $[0, 1[$, et l'existence d'une limite L, 'entuellement égale à $+\infty$, de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

En considérant les sommes partielles de la série définissant $g_p(x)$, établir l'inégalité ıivante pour tout x de $[0, 1[$ et tout entier $N \geq 1$:

$$g_p(x) \;\geq\; \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}.$$

ı déduire la limite L de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

On détermine maintenant un équivalent de $g_p(x)$ quand x tend vers 1.

') Etude du cas $0 < p \leq 1$.

Etudier le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \to t^{p-1}x^t = t^{p-1}e^{t.\ln(x)}$ lorsque le ımbre réel x est fixé dans l'intervalle $]0, 1[$ (et $0 < p \leq 1$).

ı déduire l'inégalité suivante pour tout entier naturel non nul n:

$$(n+1)^{p-1}x^{n+1} \;\leq\; \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t\,dt \;\leq\; n^{p-1}x^n.$$

En sommant ces inégalités pour $n \geq 1$, puis en effectuant le changement de variable $= -t.\ln(x)$ dans l'intégrale obtenue, en déduire que, pour $0 < x < 1$:

$$\int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du \;\leq\; |\ln(x)|^p g_p(x) \;\leq\; \int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du + x|\ln(x)|^p.$$

En déduire la limite de $|\ln(x)|^p g_p(x)$ quand x tend vers 1 (et $0 < p \leq 1$).

ontrer que $\ln(x)$ équivaut à x-1 lorsque x tend vers 1 et en déduire que $g_p(x)$ équivaut $\Gamma(p)/(1-x)^p$ quand x tend vers 1 (et $0 < p \leq 1$).

5°) <u>Etude du cas général.</u>

a) Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1[:

$$(1-x)g_{p+1}(x) \quad = \quad x+\sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^p-n^p]x^{n+1}.$$

b) Etablir à l'aide de l'inégalité des accroissements finis l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ lorsque $0 < p \leq 1$:

$$p(n+1)^{p-1} \quad \leq \quad (n+1)^p-n^p \quad \leq \quad pn^{p-1}.$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

c) En déduire l'inégalité suivante pour $0 \leq x < 1$ lorsque $0 < p \leq 1$:

$$pg_p(x)+(1-p)x \quad \leq \quad (1-x)g_{p+1}(x) \quad \leq \quad pxg_p(x)+x.$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

d) On suppose à nouveau que p est un nombre réel strictement positif quelconque. Montrer que $g_p(x)$ équivaut encore à $\Gamma(p)/(1-x)^p$ quand x tend vers 1.

PARTIE III

On se propose enfin, dans cette partie, d'appliquer les résultats précédents au calcul de l'intégrale I(a, b) où a et b désignent deux réels strictement positifs.

1°) <u>Calcul de I(a, b) pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$.</u>

a) On considère une application $h: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et on désigne par M_1 le maximum de $|h'(x)|$ lorsque x décrit $[\alpha, \beta]$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la primitive de h s'annulant en α, établir:

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)dx-(\beta-\alpha)h(\alpha)\right| \quad \leq \quad \frac{M_1(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

b) On rappelle que, dans cette question, les réels a et b sont supérieurs ou égaux à 2.
Etablir que la fonction $x \to x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur [0, 1].
En lui appliquant le résultat précédent sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = k/n$ avec $0 \leq k < n$, et en notant encore M_1 le maximum de la valeur absolue de sa dérivée lorsque x décrit [0, 1], montrer que:

$$\left|I(a,b)-u_n\right| \quad \leq \quad \frac{M_1}{2n} \qquad avec \qquad u_n \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

c) On admet le résultat suivant:
"Etant données deux séries convergentes à termes réels positifs Σa_n et Σb_n (définis pour $n \geq 1$) et de sommes respectives A et B, la série Σc_n où c_n est défini pour $n \geq 2$ par $c_n = a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... + a_{n-1}b_1$, est convergente et sa somme est AB".
En déduire le résultat suivant pour $0 \leq x < 1$:

$$g_a(x)g_b(x) \quad = \quad \sum_{n=2}^{+\infty}u_n n^{a+b-1}x^n.$$

d) A l'aide des résultats précédents, montrer enfin que:

$$\left|g_a(x)g_b(x)-I(a,b)g_{a+b}(x)\right| \quad \leq \quad \frac{M_1}{2}g_{a+b-1}(x).$$

e) Multiplier l'inégalité précédente par $(1-x)^{a+b}$, faire tendre x vers 1 et montrer, en utilisant l'équivalent en 1 de $g_p(x)$ obtenu dans la partie II, que:

$$I(a,b) \quad = \quad \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

') <u>Calcul de I(a, b) dans le cas général.</u>
n étend ce résultat au cas où $a > 0$ et $b > 0$ (on ne demande pas de vérifier la ›nvergence dans ce cas de l'intégrale $I(a, b)$).
Etablir à l'aide d'un changement de variable simple que $I(a, b) = I(b, a)$.
Prouver que $I(a+1, b) + I(a, b+1) = I(a, b)$.
ar intégration par parties, exprimer $I(a, b+1)$ en fonction de $I(a+1, b)$
n déduire $I(a+1, b)$ en fonction de $I(a, b)$.
En déduire que la formule obtenue précédemment pour $I(a, b)$ reste valable lorsque > 0 et $b > 0$.

***