# ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1995

**Option générale**

## MATHEMATIQUES 1

*Mardi 23 Mai 1995 de 14h à 18h*

*Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.*

Dans tout le problème, et pour tout polynôme P à coefficients réels, on note M(P) le maximum de la fonction $x \to |P(x)|$ sur le segment $[-1, +1]$.
On se propose alors de majorer pour tout entier naturel k le maximum $M(P^{(k)})$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P) en fonction du maximum M(P).

## PARTIE 1

On se propose d'étudier, dans cette partie, la suite de fonctions définies par récurrence pour tout nombre réel x par $T_o(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis pour $n \geq 1$ par:

$$(1) \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

1°) Etude des polynômes $T_n$.

a) Calculer $T_n(x)$ pour $n \leq 4$.

b) Etablir que, pour tout entier naturel n, $T_n$ est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que, pour tout nombre réel x: $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

c) Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise-Yvelines ;
membre de la Fesic

d) Dans la base canonique $(X^n, \dots, X, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, on note $T_n$ sous la forme:

$$T_n(x) = \lambda_n [X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \dots].$$

Calculer le coefficient dominant $\lambda_n$ du polynôme $T_n$. A l'aide de la relation (1), exprimer $b_{n+1}$ en fonction de $b_n$ et calculer $b_n$ en fonction de n pour $n \geq 2$.

2°) Etude de la fonction $T_n$ sur $]1, +\infty[$ pour $n \geq 1$.

a) On considère la fonction définie pour u appartenant à $]1, +\infty[$ par:

$$x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right).$$

Etablir qu'elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, puis montrer que:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

b) En déduire pour $x > 1$ que $T_n(x) > 1$, et montrer par récurrence pour $x \geq 1$ l'inégalité:

$$T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n.$$

3°) Etude de la fonction $T_n$ sur $[-1, 1]$ pour $n \geq 1$.

a) A l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel $\theta$ l'égalité:

$$(2) \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

b) Pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \dots, n\}$, on pose $\alpha_k = \cos[(n-k)\pi/n]$.

*On remarquera que* $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = +1$.

Calculer $T_n(\alpha_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis prouver que, si x désigne un nombre réel, l'égalité $|T_n(x)| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si x appartient à l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$.

4°) Equation différentielle vérifiée par $T_n$ pour $n \geq 1$.

a) En dérivant la relation (2), exprimer $T_n'(\cos\theta)$ en fonction de $\theta$ $(0 < \theta < \pi)$. En déduire, pour $n \geq 2$, la valeur de $T_n'(\alpha_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Etait-ce prévisible?

A l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T_n'(1)$ et $T_n'(-1)$.

b) En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel x de $[-1, +1]$:

$$(3) \qquad (x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2 T_n(x) = 0.$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel x.

c) Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n-1$. En dérivant j fois la relation (3), établir que:

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

d) En déduire en fonction de n le nombre réel $\mu_n$ tel que, pour $1 \leq j \leq n$:

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n \, . 2^{j-1} \frac{(j-1)!\,(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}.$$

## PARTIE 2

On désigne par n un entier naturel non nul et les nombres $\alpha_o$ , $\alpha_1$ , ... , $\alpha_{n-1}$ , $\alpha_n$ sont ceux définis à la partie I. On pose alors pour tout entier k tel que $0 \le k \le n$:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-\alpha_j}{\alpha_k-\alpha_j}.$$

1°) Etude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer $L_k(\alpha_k)$ et $L_k(\alpha_j)$ pour $0 \le k \le n$ et $0 \le j \le n$, $j \neq k$.

b) Etablir que la famille $(L_o, L_1, \dots , L_{n-1}, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer quelles sont, dans cette base, les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et, à l'aide des résultats de la partie I, donner les composantes de $T_n$.

2°) Majoration de $|P(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d°P \le n$.

a) Etablir, pour $x \ge 1$ et $0 \le k \le n$, l'inégalité $(-1)^{n-k}L_k(x) \ge 0$.

En déduire, pour $x \ge 1$, l'égalité $T_n(x) = |L_o(x)| + |L_1(x)| + \dots + |L_{n-1}(x)| + |L_n(x)|$.

b) Etablir enfin, pour $x \ge 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité:

$$(4) \qquad |P(x)| \le M(P)T_n(x).$$

c) On se propose enfin de minorer M(P) lorsque P est un polynôme unitaire de degré n (c'est à dire un polynôme de degré n dont le coefficient de $x^n$ est égal à 1).

A l'aide de l'inégalité (4), établir successivement que l'on a, pour $x \ge 1$ et pour tout polynôme unitaire P de degré n:

$$M(P) \ge \frac{|P(x)|}{2^{n-1}x^n} \qquad ; \qquad M(P) \ge \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donner en fonction de $T_n$ un polynôme unitaire de degré n tel que $M(P) = 1/2^{n-1}$.

3°) Majoration de $|P'(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d°P \le n$.

a) Montrer à l'aide du théorème de Rolle (dont on rappellera précisément l'énoncé) que, pour $0 \le k \le n$, le polynôme $L_k'$ possède n-1 racines réelles, appartenant à $]-1, +1[$.

Déterminer le coefficient dominant de $L_k'$ et en déduire que, pour $x \ge 1$: $(-1)^{n-k}L_k'(x) \ge 0$.

b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer P' comme combinaison linéaire des polynômes $L_o'$, $L_1'$, ... , $L_n'$.

En déduire, pour $x \ge 1$, l'égalité $T'_n(x) = |L'_o(x)| + |L'_1(x)| + \dots + |L'_{n-1}(x)| + |L'_n(x)|$.

c) Etablir enfin, pour $x \ge 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité:

$$(5) \qquad |P'(x)| \le M(P).T_n'(x).$$

4°) Majoration de $|P^{(j)}(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $0 \le j \le d°P \le n$.

a) Montrer que, pour $0 \le k \le n$, le polynôme $L_k^{(j)}$ (dérivé $j^{ième}$ de $L_k$) possède n-j racines réelles, appartenant à $]-1, +1[$, et en déduire que, pour $x \ge 1$: $(-1)^{n-k}L_k^{(j)}(x) \ge 0$.

b) En raisonnant comme précédemment, établir pour $x \ge 1$ et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$(6) \qquad |P^{(j)}(x)| \le M(P).T_n^{(j)}(x).$$

## PARTIE 3

Dans cette partie, on désigne par $\lambda$ un nombre réel appartenant à [0, 1].

1°) Déterminer l'image du segment [-1, +1] par l'application:

$$x \to \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}.$$

On pose alors pour tout polynôme P à coefficients réels de degré $n \geq 1$:

$$P_\lambda(x) = P\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Etablir que $M(P_\lambda) \leq M(P)$.

2°) Majoration de M(P') en fonction de M(P).

a) Déterminer $P_\lambda'(1)$ et déduire de l'inégalité (5) que l'on a:

$$|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda} M(P).$$

b) En déduire que:

$$(7) \qquad M(P') \leq 2n^2 M(P).$$

*(On pourra aussi introduire le polynôme Q défini par Q(x) = P(-x)).*

3°) Majoration de $M(P^{(j)})$ en fonction de M(P).

a) Déduire de l'inégalité (7) que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$:

$$(8) \qquad M(P^{(j)}) \leq 2^j[n!/(n-j)!]^2 M(P).$$

b) On se propose enfin d'améliorer cette inégalité (8). Etablir que:

$$|P^{(j)}(\lambda)| \leq \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^j T_n^{(j)}(1) M(P).$$

En déduire que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$:

$$M(P^{(j)}) \leq n2^{2j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!} M(P)$$

et prouver que cette majoration est meilleure que celle obtenue en (8).

***