BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

<u>CODE EPREUVE</u> :
281
ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note x_i sa $i^{ème}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y\rangle = {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y\rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.
Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

PARTIE I

Dans cette partie, $n=1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x)=xy-f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Quelques exemples.
   Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :
   a) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=a\dfrac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.
   b) $U=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.
   (on pourra introduire le réel β vérifiant : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$).
   c) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.
3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?
4) Plus généralement, on suppose que : $U=\mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x)>0$.
   a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note g l'application réciproque de f'.
   b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f)=\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^*(x)=xg(x)-f(g(x))$.
   Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g.
   c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x\mapsto xy-f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^*=f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\|x\|$.
   a) Pour t réel strictement positif et $y\in\mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t\to+\infty}F_y(ty)$.
   Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y\in\mathbb{R}^n,\|y\|\leq 1\}$?
   b) Lorsque $\|y\|\leq 1$, montrer que : $F_y(x)\leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^*.
   c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
On rappelle que : $\forall x,x'\in\mathbb{R}^n\quad \langle x,Ax'\rangle=\langle x',Ax\rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x) = \langle x, y\rangle - \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement : $\lambda \| x \|^2 \leq \langle x, Ax\rangle \leq \mu \| x \|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.

b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah\rangle$ et $\langle h, y - Ax\rangle$ et établir que : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax\rangle$.

c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour : $x = A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$ mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad F_y(x) = \langle x, y\rangle - \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

a) Existence d'un maximum.

- Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty$ et en déduire que pour $x_0 \in U$: il existe r strictement positif vérifiant $(\| x \| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0))$.
- Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f) = \mathbb{R}^n$.

b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.

- Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :
$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x - x', A(x-x')\rangle}{8}.$$
- En supposant que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y, montrer que : $f^*(y) < F_y\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx = c$.

On note $\operatorname{Im} M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.

On suppose que $c \in \operatorname{Im} B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\bar{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y.

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\bar{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de $\overline{x}$.

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$ $\langle x, Bx'\rangle = \langle {}^tBx, x'\rangle$.

Montrer que : $\operatorname{Im} {}^tB \subset (\ker B)^{\perp}$ en désignant par $(\ker B)^{\perp}$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\operatorname{Im} {}^tB$ et de $(\ker B)^{\perp}$ et en déduire que : $\operatorname{Im} {}^tB = (\ker B)^{\perp}$. (On admettra que : $rg(B) = rg({}^tB)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\overline{x}+th) - F_y(\overline{x}) = t\langle y - A\overline{x}, h\rangle - t^2\frac{\langle h, Ah\rangle}{2}.$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations : $A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 = \| z_p - \overline{z} \|^2 - 2r\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle + r^2 \| B(x_p - \overline{x}) \|^2$.

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\| BA^{-1/2}x \|^2 = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x\rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive .
- En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\| Bx \|^2 \le \alpha\langle x, Ax\rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \frac{2}{\alpha}\right[$.

Montrer que : $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \le r(r\alpha - 2)\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle \le 0$.

En déduire que la suite $(\| z_p - \overline{z} \|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.

***