Exercice 2 **PC et CC** ESCP 97 La durée de vie d'un certain type de composant électronique dans un circuit sous tension suit une loi exponentielle de paramètre inconnu λ. Afin d'estimer ce paramètre on réalise un circuit d'essai comprenant un tel composant. A chaque fois que cet élément tombe en panne il est immédiatement remplacé par un élément du même type. Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au temps d'attente entre la $(k-1)^{\text{ème}}$ et la $k^{\text{ème}}$ panne (X_1 est le temps d'attente de la première panne) et on suppose que les X_k sont indépendantes.

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et A_n la variable aléatoire égale au temps d'attente de la $n^{\text{ème}}$ panne.

Q1. Trouver la loi de A_n son espérance et sa variance.

Q2. $B_n = \dfrac{A_n}{n}$. Montrer que B_n est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$.

Q3. On suppose que $n \geqslant 3$. $C_n = \dfrac{1}{A_n}$. Montrer l'existence et donner la valeur de $E(C_n)$ et de $V(C_n)$.

En déduire un estimateur sans biais de λ. Est-il convergent ?

Q4. T est un réel strictement positif et Y_T est la variable aléatoire égale au nombre de pannes survenant entre les instants 0 et T.

Trouver la loi de Y_T. Calculer $E(Y_T)$. En déduire un nouveau moyen d'estimer λ.

Q1 • $A_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

• $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

• $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ ou $X_i \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$.

Alors A_n suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et n. Donc $E(A_n) = \frac{n}{\lambda}$ et $V(A_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

Q2 • $B_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

• $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

• $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont même espérance $\frac{1}{\lambda}$ et même variance $\frac{1}{\lambda^2}$.

La loi faible des grands nombres montre alors que (B_n) converge en probabilité vers $\frac{1}{\lambda}$.

Comme $E(B_n) = \frac{1}{n} E(A_n) = \frac{1}{\lambda}$. B_n est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.

Q3 Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$. Soit $r \in \{1, 2\}$. Etudions l'existence de $E(C_n^r)$ ou de $E\left(\frac{1}{A_n^r}\right)$.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}\, t^{n-1}}{(1/\lambda)^n \Gamma(n)} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de A_n.

- A_n prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.
- $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^r}$ est continue sur $[0,+\infty[-\{0\}$ donc sur $[0,+\infty[$ privé d'un ensemble fini de points.

Le théorème de transfert montre alors que $E(\varphi \circ A_n)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) f(t)\,dt$ est absolument convergente ... ou converge car $\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi(t) f(t) \geq 0$.

Donc $E(C_n^r)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^r} f(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^r} f(t) = \dfrac{e^{-\lambda t}\, t^{n-1-r}}{(1/\lambda)^n \Gamma(n)} = \dfrac{\lambda^r \Gamma(n-r)}{\Gamma(n)} \; \dfrac{e^{-\lambda t}\, t^{(n-r)-1}}{(1/\lambda)^{n-r} \Gamma(n-r)}$.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}\, t^{(n-r)-1}}{(1/\lambda)^{n-r} \Gamma(n-r)} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $n \in [\![3,+\infty[\![$ et $r \in \{1,2\}$

donc $n-r > 0$. Alors h est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\dfrac{1}{\lambda}$ et $n-r$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$ existe et vaut 1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$ existe et vaut également 1.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^r} f(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{\lambda^r \Gamma(n-r)}{\Gamma(n)}$.

Ainsi $\underline{\underline{E(C_n^r) \text{ existe et vaut } \dfrac{\lambda^r \Gamma(n-r)}{\Gamma(n)}}}$, pour $r \in \{1,2\}$ ... et même pour $r \in [\![0,2]\!]$.

$E(C_n) = \lambda \dfrac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \lambda \dfrac{\Gamma(n-1)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = \dfrac{\lambda}{n-1}$.

$E(C_n^2) = \lambda^2 \dfrac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} = \lambda^2 \dfrac{\Gamma(n-2)}{(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)} = \dfrac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$.

Alors C_n possède une variance qui vaut $\frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2$.

$V(C_n) = \frac{\lambda^2}{(n-2)(n-1)^2}\left[n-1-(n-2)\right] = \frac{\lambda^2}{(n-2)(n-1)^2}$.

$$V(C_n) = \frac{\lambda^2}{(n-2)(n-1)^2}.$$

Posons $\widehat{C}_n = (n-1)\, C_n$. $E(\widehat{C}_n)$ existe et vaut λ et $V(\widehat{C}_n)$ existe et vaut $(n-1)^2 \frac{\lambda^2}{(n-2)(n-1)^2}$ donc $\frac{\lambda^2}{n-2}$.

$\widehat{C}_n = \frac{n-1}{A_n}$ est un estimateur sans biais de λ.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|\widehat{C}_n - \lambda| \geq \varepsilon) = P(|\widehat{C}_n - E(\widehat{C}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\widehat{C}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2(n-2)}$ et

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2(n-2)} = 0$. Par encadrement : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|\widehat{C}_n - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$.

$\widehat{C}_n$ est donc un estimateur sans biais et convergent de λ.

Q4 $Y_T(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1er cas... $n=0$. $P(Y_T = 0) = P(X_1 > T) = 1 - P(X_1 \leq T) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

2e cas... $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Y_T = 0) = P(\{X_1 + \cdots + X_n \leq T\} \cap \{X_1 + \cdots + X_{n+1} > T\})$

$P(Y_T = n) = P(\{X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} > T\} \setminus \{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > T\})$.

$P(Y_T = n) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} > T) - P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > T)$ car

$\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > T\} \subset \{X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} > T\}$.

$P(Y_T = n) = 1 - P(X_1 + \cdots + X_{n+1} \leq T) - 1 + P(X_1 + \cdots + X_n \leq T)$.

$P(Y_T = n) = P(A_n \leq T) - P(A_{n+1} \leq T)$.

$$P(Y_T = n) = \int_0^T \frac{e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(1/\lambda)^n \Gamma(n)} dx - \underbrace{\int_0^T \frac{e^{-\lambda x} x^n}{(1/\lambda)^{n+1} \Gamma(n+1)} dx}_{\beta_n}$$

Une petite intégration par parties sur la première intégrale donne :

$$P(Y_T = n) = \left[\frac{e^{-\lambda x} x^n/n}{(1/\lambda)^n \Gamma(n)} \right]_0^T - \int_0^T \frac{(-\lambda) e^{-\lambda x} x^n/n}{(1/\lambda)^n (n-1)!} dx - \beta_n.$$

$$P(Y_T = n) = \frac{e^{-\lambda T} T^n}{(1/\lambda)^n n \times (n-1)!} + \int_0^T \frac{e^{-\lambda x} x^n}{(1/\lambda)^{n+1} n!} dx - \beta_n$$

$$P(Y_T = n) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} + \underbrace{\int_0^T \frac{e^{-\lambda x} x^n}{(1/\lambda)^{n+1} \Gamma(n+1)} dx - \beta_n}_{=0}$$

$$P(Y_T = n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \; P(Y_T = n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$

Ainsi $Y_T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda T)$.

Alors $E(Y_T) = \lambda T$. Donc $E\left(\frac{Y_T}{T}\right) = \lambda$.

On pourra donc se servir de $\frac{Y_T}{T}$ pour estimer λ.

EX 16

Exercice 1 **ESCP 2006 3.31** **Estimation**

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta}(1-\dfrac{x}{\theta}) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où θ est un paramètre inconnu strictement positif.

On cherche à estimer θ à partir d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $M_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition F de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Q2. a) Déterminer la constante a pour que $T_n = a\overline{X_n}$ soit un estimateur sans biais du paramètre θ.

b) Calculer le risque quadratique de T_n.

Q3. a) Déterminer la loi de M_n.

On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^n \, du$ et on admet que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

b) Montrer que : $E(M_n) = \theta(1 - I_n)$. Que peut-on en déduire pour M_n en tant qu'estimateur de θ ?

c) Montrer (ou admettre) que : $V(M_n) = \theta^2 \left(\dfrac{1}{n+1} - I_n^2\right)$.

d) Calculer le risque quadratique de M_n. Entre T_n et M_n , quel estimateur choisiriez-vous, et pourquoi ?

Q4. a) Donner un estimateur sans biais de θ de la forme $M'_n = a_n M_n$, a_n étant un réel dépendant de n.

b) Entre M'_n et T_n , quel estimateur choisiriez-vous, et pourquoi ?

Q1 . $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

$\forall x \in [0, \theta[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) dt = \frac{2}{\theta}\left[-\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{t}{\theta}\right)^2\right]_0^x$

$\forall x \in [0, \theta[$, $F(x) = 1 - \left(1 - \dfrac{x}{\theta}\right)^2$.

$\forall x \in [\theta, +\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt - \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - \int_x^{+\infty} 0\,dt = 1$.

Ainsi $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 \text{ si } x \in [0, \theta[\\ 1 \text{ si } x \in [\theta, +\infty[\end{cases}$

Soit r dans $\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^r f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} t^r f(t)\,dt$ existent et valent 0 .

$\displaystyle\int_0^{\theta} t^r f(t)\,dt$ existe car $t \mapsto t^r f(t)$ est continue sur $[0, \theta]$. Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt$ converge, ce qui permet de dire que $\underline{X \text{ possède un moment d'ordre } r}$.

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt = \int_0^\theta t^r \frac{2}{\theta}\left(1-\frac{t}{\theta}\right)d\theta = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta t^r\,dt - \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta t^{r+1}\,dt.$$

$$E(X^r) = \frac{2}{\theta}\left[\frac{t^{r+1}}{r+1}\right]_0^\theta - \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{t^{r+2}}{r+2}\right]_0^\theta = \frac{2\theta^r}{r+1} - \frac{2\theta^r}{r+2} = \frac{2\theta^r}{(r+1)(r+2)}.$$

$$\underline{E(X^r) = \frac{2\theta^r}{(r+1)(r+2)}}.$$

ce qui précède suffit largement pour dire que X possède une espérance et une variance.

$E(X) = \dfrac{2\theta}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{\theta}{3}$ et $E(X^2) = \dfrac{2\theta^2}{(2+1)(2+2)} = \dfrac{\theta^2}{6}$. $V(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = \dfrac{\theta^2}{6} - \dfrac{\theta^2}{9} = \dfrac{\theta^2}{18}$.

$\underline{\underline{E(X) = \dfrac{\theta}{3}}}$ et $\underline{\underline{V(X) = \dfrac{\theta^2}{18}}}$.

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{\theta}{3}$.

Alors $E(3\overline{X}_n) = \theta$.

$\underline{\underline{T_n = 3\overline{X}_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}}$

b) T_n est sans biais donc son risque quadratique est sa variance.

$$V(T_n) = 9V(\overline{X}_n) = \frac{9}{n^2}V(X_1+\dots+X_n) \underset{\uparrow}{=} \frac{9}{n^2}[V(X_1)+\dots+V(X_n)] = \frac{9}{n^2}\times n\times\frac{\theta^2}{18}.$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

$\underline{\underline{\text{Le risque quadratique de } T_n \text{ est} : \dfrac{\theta^2}{2n}.}}$

Q3 a) M_n prend ses valeurs dans $[0,\theta]$. Notons F_{M_n} sa fonction de répartition.

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F_{M_n}(x) = 0$ et $\forall x \in [\theta,+\infty[$, $F_{M_n}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,\theta[$. $F_{M_n}(x) = P(\text{Max}(X_1,\dots,X_n) \leq x)$

$$F_{M_n}(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x\}\right) \underset{\uparrow}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F(x) = (F(x))^n$$

par indépendance

Précisément $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \left[1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right]^n & \text{si } x \in [0, \theta[\\ 1 & \text{si } x \in [\theta, +\infty[\end{cases}$

"mieux" $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \left[1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right]^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x \in [\theta, +\infty[\end{cases}$.

$x \mapsto 0$, $x \mapsto \left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right)^n$ et $x \mapsto 1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors F_{M_n} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$, $[0, \theta]$ et $[\theta, +\infty[$. Cela suffit pour dire que 1) F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

2) F_{M_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, \theta\}$.

<u>M_n est alors une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\theta, +\infty[$, $F'_{M_n}(x) = 0$.

$\forall x \in]0, \theta[$, $F'_{M_n}(x) = n\left(-2\left(-\frac{1}{\theta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta}\right)\right)\left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right)^{n-1} = \frac{2n}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)\left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right)^{n-1}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{M_n}(x) = \begin{cases} \frac{2n}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)\left[1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right]^{n-1} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_{M_n} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{M_n} sur $\mathbb{R} - \{0, \theta\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi <u>f_{M_n} est une densité de M_n.</u>

b) et c) Soit $r \in \mathbb{N}$. $t \mapsto t^r f_{M_n}(t)$ est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]\theta, +\infty[$ et continue sur $[0, \theta]$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{M_n}(t)\,dt$ existe et vaut $\int_0^\theta t^r f_{M_n}(t)\,dt$.

Alors <u>M_n possède un moment d'ordre r qui vaut</u> $\int_0^\theta t^r f_{M_n}(t)\,dt$.

Ainsi $E(\Pi_n^r)$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^\theta t^r \frac{2n}{\theta}\left(1-\frac{t}{\theta}\right)\left[1-\left(1-\frac{t}{\theta}\right)^2\right]^{n-1} dt$.

$t \mapsto \left(1-\frac{t}{\theta}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = 1-\frac{t}{\theta}$

dans ce qui suit.

$$E(\Pi_n^r) = \int_1^0 \theta^r(1-u)^r \frac{2n}{\theta} u(1-u^2)^{n-1}(-\theta)\,du = \theta^r\int_0^1 (1-u)^r\, 2nu\,(1-u^2)^{n-1} du.$$

$$\begin{cases} u = 1-\frac{t}{\theta} \\ t = \theta(1-u) \\ dt = -\theta\, du \end{cases}$$

$$\underline{\underline{E(\Pi_n^r) = \theta^r\int_0^1 (1-u)^r\, 2nu\,(1-u^2)^{n-1} du.}}$$

Supposons $r \geq 1$ et posons $\forall u\in[0,1]$, $\varphi(u) = (1-u)^r$ et $\psi(u) = -(1-u^2)^n$

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall u \in [0,1]$, $\varphi'(u) = -r(1-u)^{r-1}$ et $\psi'(u) = 2nu(1-u^2)^{n-1}$

ceci autorise l'intégration par parties suivante.

$$E(\Pi_n^r) = \theta^r\left[(1-u)^r(-(1-u^2)^n)\right]_0^1 - \theta^r\int_0^1 (-r(1-u)^{r-1})(-(1-u^2)^n)\,du.$$

$$E(\Pi_n^r) = \theta^r\left[1 - r\int_0^1 (1-u)^{r-1}(1-u^2)^n du\right].$$

Pour $r=1$ il vient $\underline{\underline{E(\Pi_n) = \theta(1-I_n).}}$

Pour $r=2$ on obtient : $E(\Pi_n^2) = \theta^2\left[1 - 2\int_0^1 (1-u)(1-u^2)^n du\right]$.

$$E(\Pi_n^2) = \theta^2\left[1 - 2\int_0^1 (1-u^2)^n du + 2\int_0^1 u(1-u^2)^n du\right]$$

$$E(\Pi_n^2) = \theta^2\left[1 - 2I_n + 2\left[\frac{(1-u^2)^{n+1}}{(-2)(n+1)}\right]_0^1\right] = \theta^2\left[1 - 2I_n + \frac{1}{n+1}\right].$$

Alors $V(\Pi_n) = E(\Pi_n^2) - (E(\Pi_n))^2 = \theta^2\left(1 - 2I_n + \frac{1}{n+1}\right) - \theta^2(1-I_n)^2$

$$V(\Pi_n) = \theta^2\left(1 - 2I_n + \frac{1}{n+1} - 1 + 2I_n - I_n^2\right).$$

$$\underline{\underline{V(\Pi_n) = \theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right).}}$$

Rappelons que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(M_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\theta(1-I_n)) = \theta$.

M_n est un estimateur de θ asymptotiquement sans biais.

$\lim\limits_{n\to+\infty} V(M_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right)\right) = 0$. ce qui suffit pour dire

que M_n est un estimateur de θ convergent.

d) Le risque quadratique de M_n est $r_{M_n}(\theta) = V(M_n) + (E(M_n)-\theta)^2$.

Alors $r_{M_n}(\theta) = \theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right) + \left(\theta(1-I_n)-\theta\right)^2 = \theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right) + (-\theta I_n)^2$

$r_{M_n}(\theta) = \theta^2\left[\frac{1}{n+1} - I_n^2 + I_n^2\right]$

$r_{M_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{n+1}$.

$r_{T_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{2n} < \frac{\theta^2}{n+1} = r_{M_n}(\theta)$ ... pour $n \geq 2$.

Donc T_n est un meilleur estimateur de θ que M_n (de plus il est sans biais et convergent...)

(Q4) a) $u \mapsto 1-(1-u^2)^n$ est continue et positive sur $[0,1]$ sans être identiquement nulle sur $[0,1]$ (au moins pour $n \geq 1$!).

Alors $\int_0^1 (1-(1-u^2)^n)\,du > 0$. Donc $1 - I_n > 0$.

Posons $M_n' = \frac{1}{1-I_n} M_n$. $E(M_n') = \frac{1}{1-I_n} E(M_n) = \theta$.

$M_n' = \frac{1}{1-I_n} M_n$ est un estimateur sans biais de θ.

b) $V(\pi'_n) = \dfrac{1}{(1-I_n)^2} V(\pi_n)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\pi'_n) = \dfrac{1}{(1-0)^2} \times 0 = 0$.

<u>π'_n est un estimateur convergent de θ.</u>

π'_n et T_n sont deux estimateurs sans biais et convergents de θ.

$$V(\pi'_n) = \frac{1}{(1-I_n^2)} V(\pi_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} V(\pi_n) = \theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right) = \frac{\theta^2}{n}\left[\frac{n}{n+1} - (\sqrt{n}\, I_n)^2\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} - (\sqrt{n}\, I_n)^2\right) \underset{\uparrow}{=} 1 - \frac{\pi}{4} \neq 0$$

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n}\, I_n) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Alors $V(\pi'_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\theta^2}{n}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Alors $\dfrac{V(\pi'_n)}{V(T_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{\theta^2}{n}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\theta^2}{2n}} = 2 - \dfrac{\pi}{2}$ et $2 - \dfrac{\pi}{2} < 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V(\pi'_n)}{V(T_n)} = 2 - \dfrac{\pi}{2} < 1$.

donc pour n assez grand $\dfrac{V(\pi'_n)}{V(T_n)} < 1$ soit $V(\pi'_n) < V(T_n)$.

<u>Alors nous choisissons π'_n comme estimateur de θ.</u>

EX 17

Exercice 1 **ESCP 2007 3.7** **Estimation**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, d'écart-type σ, le paramètre réel inconnu σ étant strictement positif.

Q1. Montrer que la variable aléatoire $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit la loi $\gamma(1/2)$.

Q2. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendant, identiquement distribué, de la loi de X.

a) Donner une densité de la variable aléatoire $S_n = \dfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

b) Soit Y_n définie par $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Montrer que Y_n est un estimateur sans biais de σ^2.

c) En justifiant son existence, calculer l'espérance $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.

En déduire un estimateur $\widehat{\sigma_n}$ sans biais du paramètre σ.

Q3. a) En justifiant son existence, calculer la variance $V(\widehat{\sigma_n})$ en fonction de n et σ.

b) On admet que, pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x+n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^x (n-1)!$.

Montrer que $\widehat{\sigma_n}$ est un estimateur convergent de σ.

Q1 Notons F_X et F_T les fonctions de répartition de X et de T.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)}$. f_X est une densité de X.

Comme f_X est continue sur $\mathbb{R}$, F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X'(x) = f_X(x)$.

T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_T(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_T(x) = P(T \leq x) = P\left(\dfrac{X^2}{2\sigma^2} \leq x\right) = P(-\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma \leq X \leq \sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma)$

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_T(x) = F_X(\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma) - F_X(-\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma)$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} F_X(\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma) - F_X(-\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$$

$x \mapsto \sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma$ et $x \mapsto -\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition F_T est continue sur $[0, +\infty[$.

F_T est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc F_T est continue sur $]-\infty, 0[$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0 = F_X(\sqrt{2}\sqrt{0}\,\sigma) - F_X(-\sqrt{2}\sqrt{0}\,\sigma) = F_T(0)$; F_T est continue à gauche en 0.

F_T est nulle sur $]-\infty, 0[$

Ce qui précède montre que F_T est continue sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma$ et $x \mapsto -\sqrt{2}\sqrt{x}\,\sigma$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition F_T est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

F_T est également de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ car elle est nulle sur cet intervalle.

Ainsi F_T est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

Les deux points précédents montrent que T est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty,0[,\ F_T'(x)=0.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_T'(x)=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{x}}F_T'(\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)+\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{x}}F_T'(-\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)$. Rappelons que $F_T'=f_T$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_T'(x)=\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\left[f_T(\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)+f_T(-\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)\right]$$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_T'(x)=\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)^2/2\sigma^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(-\sqrt{2}\sqrt{x}\sigma)^2/2\sigma^2}\right]$$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_T'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{\pi}}\times 2\times e^{-x}=\frac{e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty,0]\end{cases}$. f_T est positive sur $\mathbb{R}$

et coïncide avec F_T' sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Ainsi f_T est une densité de T.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}x^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. g est une densité

d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre $1/2$.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{1/2-1}}{\sqrt{\pi}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}\int_0^{+\infty}f_T(t)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(t)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}$$

Alors $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}=1$. $\sqrt{\pi}=\Gamma(1/2)$. Ainsi $f_T=g$. Alors $T \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

Q2 **a)** • $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{X_i^2}{2\sigma^2}$ suit la loi gamma de paramètres 1 et $\frac{1}{2}$.

• $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $\frac{X_1^2}{2\sigma^2}, \frac{X_2^2}{2\sigma^2}, \dots, \frac{X_n^2}{2\sigma^2}$ sont indépendantes.

Le cours montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$ suit la loi gamma de paramètres 1 et $n \times \frac{1}{2}$.

Alors $S_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{n}{2})$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}\, t^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n/2)} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_{S_n} est une densité de S_n.

b) $Y_n = \frac{2\sigma^2}{n} S_n$. De plus $E(S_n)$ existe et vaut $\frac{n}{2}$.

Alors $E(Y_n)$ existe et vaut $\frac{2\sigma^2}{n} \times \frac{n}{2}$; soit : σ^2.

Y_n est un estimateur sans biais de σ^2.

c) Notons que $\sqrt{Y_n} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{S_n}$. Étudions l'existence de $E(\sqrt{S_n})$.

S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Le théorème de transfert indique alors que $E(\sqrt{S_n})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, f_{S_n}(t)\,dt$ est absolument convergente.

Or ici $\forall t \in [0,+\infty[$, $\sqrt{t}\, f_{S_n}(t) \geq 0$. Donc $E(\sqrt{S_n})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, f_{S_n}(t)\,dt$ converge. Notons qu'en cas d'existence $E(\sqrt{S_n}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, f_{S_n}(t)\,dt$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\sqrt{t}\, f_{S_n}(t) = \frac{e^{-t}\, t^{\frac{n+1}{2}-1}}{\Gamma(n/2)} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} f_{S_{n+1}}(t)$.

Or $\int_0^{+\infty} f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ existe et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, f_{S_n}(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Ainsi $E(\sqrt{S_n})$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Alors $E(\sqrt{T_n})$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{n}}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Posons $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\sqrt{T_n}$. $E(\hat{\sigma}_n) = \sigma$.

$\hat{\sigma}_n$ est un estimateur sans biais de σ.

(Q3) a) $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{2}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^2 T_n$ et $E(T_n)$ existe et vaut σ^2.

Alors $E(\hat{\sigma}_n^2)$ existe et vaut $\frac{n}{2}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^2\sigma^2$.

donc $\hat{\sigma}_n$ possède un moment d'ordre 2 donc une variance.

$$V(\hat{\sigma}_n) = E(\hat{\sigma}_n^2) - (E(\hat{\sigma}_n))^2 = \left(\frac{n}{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^2 - 1\right)\sigma^2.$$

b) Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\hat{\sigma}_n) = 0$. Il suffit de montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n}{2}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^2$ converge vers 1.

Pour cela il suffit de vérifier que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = 1$.

$$u_{2p} = \frac{2p}{2}\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\right)^2 \underset{p\to+\infty}{\sim} p\left(\frac{(p-1)!}{p^{1/2}(p-1)!}\right)^2 = 1\ ; \quad \lim_{p\to+\infty} u_{2p} = 1.$$

$$u_{2p+1} = \frac{2p+1}{2}\left(\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\right)^2 \sim p\left(\frac{p^{1/2}(p-1)!}{p!}\right)^2 = p\left(\frac{1}{p^{1/2}}\right)^2 = 1\ ; \quad \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1} = 1.$$

$\hat{\sigma}_n$ est un estimateur sans biais de σ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\hat{\sigma}_n) = 0$ donc $\hat{\sigma}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de σ.