EDHEC 1994 exercice 1

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifféremment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}.$$

Q1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)

Q2. Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $b_n = \dfrac{n}{2^n}$, $c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

Q3. Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Q4. Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.

Q5. Montrer que $s : u \longmapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$; quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} s$?

Q6. Déterminer $\operatorname{Ker} s$.

(Q1) Notons que le texte indique que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Posons $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$, $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$. Notons que φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi nous avons $\dim \mathcal{E} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

- Soit λ dans $\mathbb{R}$. Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un couple d'éléments de $\mathcal{E}$.

$\varphi(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \varphi((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2)$.

$\varphi(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) = \lambda\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{E}\times\mathcal{E}$, $\varphi(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lambda\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

- $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$, $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$.

Finalement <u>φ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.</u>

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. Notons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathcal{E}}$ en faisant une récurrence d'ordre 3.

  → $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{R}^3}$; $(u_0, u_1, u_2) = (0,0,0)$; $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$.

  La propriété est donc vraie pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$.

  → Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie pour n, $n+1$ et $n+2$. $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$.

  Alors $u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n = \frac{3}{2}\times 0 - \frac{3}{4}\times 0 + \frac{1}{8}\times 0 = 0$.

  Ainsi $u_{n+3} = 0$. La propriété est vraie pour $n+3$. Ceci achève la récurrence.

Donc $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathcal{E}}$.

Alors $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathcal{E}}\}$ (... car $0_{\mathcal{E}} \in \operatorname{Ker}\varphi$...). Donc <u>$\varphi$ est une application linéaire injective de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.</u>

- Notons que φ est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence d'ordre 3 :

$$\begin{cases} u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_2 = c \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \end{cases}$$

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2) = (a,b,c)$.

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un antécédent de (a,b,c) par φ dans $\mathcal{E}$.

Ainsi $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{E},\ \varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}})=(a,b,c)$.

Donc φ est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Ceci achève de montrer que φ est une application linéaire bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Donc $\dim \mathcal{E} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

Q2 Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ t_n = \frac{n^p}{2^n}$.

$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle indexée par $\mathbb{N}$. Montrons que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{E}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{3}{2}\frac{(n+2)^p}{2^{n+2}} - \frac{3}{4}\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} + \frac{1}{8}\frac{n^p}{2^n}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{1}{2^{n+3}}\left[3(n+2)^p - 3(n+1)^p + n^p\right]$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{1}{2^{n+3}}\left[3-3+1\right] = \frac{1}{2^{n+3}} = t_{n+3}$ si $p=0$.

Si $p=1$: $\frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{1}{2^{n+3}}\left[3(n+2) - 3(n+1) + n\right] = \frac{1}{2^{n+3}}(n+3) = t_{n+3}$.

Si $p=2$: $\frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{1}{2^{n+3}}\left[3(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + n^2\right] = \frac{1}{2^{n+3}}\left[3(n+2-n-1)(n+2+n+1) + n^2\right]$

Si $p=2$: $\frac{3}{2}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{1}{8}t_n = \frac{1}{2^{n+3}}\left(3(2n+3) + n^2\right) = \frac{1}{2^{n+3}}(n^2+6n+9) = \frac{1}{2^{n+3}}(n+3)^2 = t_{n+3}$.

Ainsi si $p\in\{0,1,2\}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{E}$. Si $p\in\{0,1,2\}$, $\left(\frac{n^p}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{E}$.

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{E}$.

Montrons que $\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de $\mathcal{E}$.

Cette famille est une famille de cardinal 3 de $\mathcal{E}$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 3. Ainsi pour montrer que cette famille est une base de $\mathcal{E}$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \gamma(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathcal{E}}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha\times\frac{1}{2^n} + \beta\times\frac{n}{2^n} + \gamma\frac{n^2}{2^n} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha + \beta n + \gamma n^2 = 0$. Alors

Alors $\begin{cases} \alpha + \beta \times 0 + \gamma \times 0^2 = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta \times 2 + \gamma \times 2^2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma \\ -\gamma + 2\gamma = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma = 0 \end{cases}$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ainsi $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \gamma (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_E \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ceci achève de montrer que $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de E.

Comme nous l'avons dit plus haut cela permet également de dire que $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de E.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{n}{2^n}$ et $c = \frac{n^2}{2^n}$, $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de E.

Q3 Soit u un élément de E. $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ u = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n = \alpha \frac{1}{2^n} + \beta \frac{n}{2^n} + \gamma \frac{n^2}{2^n} = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\beta}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \gamma n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc les séries de termes généraux $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont convergentes.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Le cours indique que les séries de termes généraux $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent

Alors la série de terme général $n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente comme combinaison de deux séries convergentes

Alors la série de terme général u_n converge comme combinaison de trois séries convergentes.

Si u appartient à E, la série de terme général u_n est convergente.

Q5 • $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2^n}$. Alors le cours indique que $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. $S(a) = 2$.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$.

Donc $S(b) = 2$.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et toutes ces séries convergent

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4+2 = 6.$$

Ainsi $\underline{\underline{S(C) = 6}}$.

Q5

- Pour tout u dans $\mathcal{E}$, $s(u)$ est un réel. s est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit (u,v) un couple d'éléments de $\mathcal{E}$.

$s(\lambda u+v) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \lambda s(u) + s(v)$ car toutes les séries convergentes.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in \mathcal{E}^2$, $s(\lambda u+v) = \lambda s(u) + s(v)$. $\underline{s \text{ est une application linéaire de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

Ainsi $\underline{\underline{s \text{ est une application linéaire de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ ou une forme linéaire sur } \mathcal{E}}}$.

$\operatorname{Im} s \subset \mathbb{R}$. donc $\dim \operatorname{Im} s \leq \dim \mathbb{R} = 1$. $\dim \operatorname{Im} s \in \{0,1\}$.

$s(a) = 2$ donc $2 \in \operatorname{Im} s$. Ainsi $\operatorname{Im} s$ n'est pas réduit à 0. Ainsi $\dim \operatorname{Im} s = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} s = \dim \mathcal{E} - \dim \operatorname{Im} s = 3 - 1 = 2$.

$\underline{\underline{\text{La dimension de } \operatorname{Ker} s \text{ est } 2}}$.

Q6 Soit $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$ un élément de $\mathcal{E}$. $\varphi(u) = \varphi(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c)$.

$\varphi(u) = 2\alpha + 2\beta + 6\gamma$. $u \in \operatorname{Ker}\varphi \iff 2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 \iff \alpha + \beta + 3\gamma = 0$.

$\operatorname{Ker}\varphi$ est donc l'hyperplan de $\mathcal{E}$ d'équation $\alpha + \beta + 3\gamma = 0$ dans la base (a,b,c) de $\mathcal{E}$.

$\underline{\underline{\operatorname{Ker}\varphi \text{ est l'hyperplan de } \mathcal{E} \text{ d'équation } \alpha+\beta+3\gamma=0 \text{ dans la base } (a,b,c) \text{ de } \mathcal{E}}}$.

Notons que $a-b$ et $3a-c$ sont deux éléments de $\operatorname{Ker}\varphi$ clairement indépendants.

Comme $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 2$: $\underline{\underline{(a-b,\ 3a-c) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\varphi}}$.

EDHEC 1994 exercice 2

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,t^n\,\mathrm{d}t$$

Q1 Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

On fait Q2'

Q2 a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

Q2' n est dans $\mathbb{N}$. Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

Q3 a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$, K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

Q4 On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

Q1 Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$. f_α est continue sur $]0,+\infty[$.

$f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 \times \frac{t}{t} = 1$. Alors $\lim\limits_{t\to 0} f_\alpha(t) = 1$. Donc f_α est prolongeable par continuité en 0.

Alors $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ converge. Or $\forall t \in]0,1]$, $f_\alpha(t) \geq 0$ donc $\int_0^1 |f_\alpha(t)|dt$ converge.

Remarque.. Nous noterons dans la suite $\hat{f}_\alpha$ le prolongement par continuité de f_α en 0.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $\hat{f}_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $|t^2 f_\alpha(t)| = t^2 e^{-\alpha t}\frac{|\sin t|}{t} = t e^{-\alpha t}|\sin t| \leq t e^{-\alpha t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(te^{-\alpha t}) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha t}{e^{\alpha t}}\right) = 0$ (croissance comparée)

Alors par encadrement $\lim\limits_{t\to+\infty}|t^2 f_\alpha(t)| = 0$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2|f_\alpha(t)| = 0$.

Ainsi 1/ $|f_\alpha(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2/ $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f_\alpha(t)| \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$.

3/ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}|f_\alpha(t)|dt$.

Finalement $\int_0^{+\infty}|f_\alpha(t)|dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ est absolument convergente.

Remarque.. Notons qu'alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ est convergente.

Q2 Version 1.. Celle du texte.

a) $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall A \in [0,+\infty[$, $\int_0^A e^{-\alpha t}dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^A = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha A})$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

I_0 existe et $I_0 = \frac{1}{\alpha}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que I_{n-1} converge.

$u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-\alpha t}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$\forall A \in [0,+\infty[$, $\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt = \left[t^n\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\right]_0^A - \int_0^A n t^{n-1}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)dt = -\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(A^n e^{-\alpha A}\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}\frac{(\alpha A)^n}{e^{\alpha A}}\right) \underset{\alpha>0\,!}{=} 0$ par croissance comparée.

Nous avons supposé que I_{n-1} converge.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt\right) = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Donc $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}dt$ converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt$ ou $I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}$.

Si $n\in\mathbb{N}^*$ et si I_{n-1} est convergente alors I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}$.

c) Remarque.. Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{(n-1)!}\alpha^{n-1}I_{n-1}$.

Donc $\left(\frac{1}{n!}\alpha^n I_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{0!}\alpha^0 I_0 = I_0 = \frac{1}{\alpha}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. Fin de la remarque !

Montrons alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ... par récurrence.

→ C'est clair pour $n=0$ d'après a)

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour n.

Par hypothèse I_{n-1} converge et vaut $\frac{(n-1)!}{\alpha^{(n-1)+1}}$. b) montre alors que

I_n converge et que $I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}$

Donc I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ce qui achève l'récurrence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Version 2. Utilisation de Γ qui n'était pas au programme en 1993.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto e^{-\alpha t}t^n$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$t\mapsto \alpha t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Cela justifie le changement de variable $u=\alpha t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A e^{-\alpha t}\, t^n\, dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{\alpha A} e^{-u} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha}\, du = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{\alpha A} e^{-u} u^n\, du.$

Or $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1}\, du$ converge et vaut $((n+1)-1)!$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n\, du$ converge et vaut $n!$

$\alpha > 0$ donc $\lim_{A \to +\infty} (\alpha A) = +\infty$

Alors $\lim_{A \to +\infty} \left(\int_0^A e^{-\alpha t} t^n\, dt\right) = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{\alpha A} e^{-u} u^n\, du\right) = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \times n! = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$

Donc $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n\, dt$ converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q3 a) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sin x$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right)$ (récurrence simple...)

En particulier $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(0) = \sin\left(k \times \frac{\pi}{2}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$

En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n+1$ en 0, il vient :

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(x-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)\right| \leq \frac{|x-0|^{2n+2}}{(2n+2)!} \max_{t \in [0,x]} |\varphi^{(2n+2)}(t)| \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^+.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \sin\left(k \times \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \max_{t \in [0,x]} \left|\sin\left(t + k \times \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Notons que si k est pair : $\sin\left(k \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Or $\forall k \in \mathbb{N},\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\frac{\pi}{2} = (-1)^k.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ou

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$ en multipliant l'inégalité précédente par $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right|$

il vient : $\left|e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right| = \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$

Donc $\left|\hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $\psi(x) = \hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$

Nous venons de voir que $\forall x \in]0,+\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Or $\hat{f}_\alpha$ vaut 1 en 0 de même que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$. Alors l'inégalité précédente vaut encore pour $x=0$. OK ?

$\forall x \in [0,+\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$ or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$. Alors :

1) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ est absolument convergente donc convergente, ce qui n'est pas un scoop !

2) $\left|\int_0^{+\infty} \psi(x) dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$

3) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$.

4) $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right] dx$ ou

$\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{2k} dx$ car toutes les intégrales convergent, ou encore $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}$.

Alors $\left|I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ ou

$$\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Remarque .. Nous oublierons pudiquement le K qui est de KK ...

c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}I_{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}\times\frac{(2n+1)!}{\alpha^{2n+2}} = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+2} \underset{\alpha\geq 1}{\leq} \frac{1}{2n+2}$.

Or $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}I_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\times\frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}\right| \leq \frac{1}{2n+2}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+2}=0$. Donc par encadrement

il vient $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}} = I$ ou $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\alpha^3}+\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right) = I$.

Remarque.. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Q4 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[0,1]$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k \underset{-t^2\neq 1}{=} \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$. ← ou n !

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[0,1]$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1]$. Intégrons l'égalité précédente entre 0 et x.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,dt - \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Alors $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x = (-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

donc $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\arctan x\right| = \left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| = \left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \underset{x\geq 0}{\leq} \int_0^x\left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right|dt = \int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

$\forall t\in[0,x]$, $t^{2n+2}\geq 0$ et $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$ donc $\forall t\in[0,x]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq t^{2n+2}$.

Alors $\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq\int_0^x t^{2n+2}\,dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leq\frac{1}{2n+3}$ car $x\in[0,1]$.

Ainsi $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\arctan x\right|\leq\frac{1}{2n+3}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans $[0,1]$

$\mathbb{N}^*$ si vous voulez faire plaisir au correcteur.

<u>Remarque</u>.- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$. Mais par encadrement il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x) \ldots \text{ pour tout } x \text{ dans } [0,1]$$

Donc pour tout x dans $[0,1]$ la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$. Par imparité ceci vaut encore pour tout $x \in [-1,1]$.

Pour $x = 1$ on retrouve un résultat classique : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \ldots$

c) $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1/\alpha)^{2n+1}}{2n+1} = \arctan \frac{1}{\alpha}$. $\underline{\underline{I = \arctan \frac{1}{\alpha}}}$.

remarque de Q3 c) — Remarque précédente ($1/\alpha \in [0,1]$).

$$\underline{\underline{\forall \alpha \in [1,+\infty[, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\, dt = \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha}}$$

où comme ($\alpha > 0$)..

EDHEC 1998 exercice 1

Question préliminaire :

La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geqslant N$, alors $x_n^2 \leqslant x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et d'autre part la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\text{ch}(u_n)} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Q1. Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.

Q2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.

Q3. a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Q4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.

b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.

Q5. a) Montrer que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.

b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.

c) En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

EXERCICE 1

Question préliminaire..

Supposons que la série de terme général x_n converge. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq x_n = |x_n| < \varepsilon$

donc $\exists p_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow 0 \leq x_n < 1$; ceci donne encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq x_n .$$

En posant $N = p_1$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq x_n$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général x_n^2 converge.

(Q1) ch est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x$!

$ch'0 = 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$, $ch'x > 0$; $\forall x \in]-\infty,0[$, $ch'x < 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} ch\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x(1+e^{-2x})}{2}\right) = +\infty$, par parité : $\lim\limits_{x\to-\infty} ch\,x = +\infty$

Notons encore que $ch\,0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'x$		$-$	0	$+$	
$ch\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(Q2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc :

$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(Q3) a) Notons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie car ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- C'est clair pour $n = 0$ car $u_0 = 1$
- Supposons la propriété vraie pour n ($n \in \mathbb{N}$) et montrons la pour $n+1$.

$u_n > 0$ et $ch\,u_n \geq 1$ donc ; $u_{n+1} = \frac{u_n}{ch\,u_n} > 0$.

ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{ch} x > 1$; donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} < 1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{\operatorname{ch} x} < x$. Il nous vient de voir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Nous pouvons alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} < u_n$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

b) $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 ; $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \operatorname{ch} u_n = u_n$ et ch est continue en ℓ ;

par passage à la limite il vient alors $\ell \operatorname{ch} \ell = \ell$ ou $\ell(\operatorname{ch} \ell - 1) = 0$

donc $\ell = 0$ ou $\operatorname{ch} \ell = 1$ ce qui veut dire $\ell = 0$ (!) car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{ch} x > 1$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Q4 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n + 1 < 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < v_n < 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et ch est continue en 0 donc

$\lim_{n \to +\infty} (\operatorname{ch} u_n) = \operatorname{ch} 0 = 1$; ainsi $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1\right) = \frac{1}{1} - 1 = 0$

donc $(v_n)_{n \geq 0}$ converge et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

c) Observons que pour $k \in \mathbb{N}$, $-1 < v_k$ donc $\ln(1 + v_k)$ a un sens.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) = \ln u_n - \ln u_0 \overset{u_0 = 1}{=} \ln u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \ln u_n$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ donc $\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$; $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = -\infty$.

La série de terme général $\ln(1 + v_n)$ est divergente.

La série de terme général $-\ln(1+v_n)$ est également divergente.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $-\ln(1+v_n) \sim -v_n$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-v_n \geq 0$, $-v_n \sim -\ln(1+v_n)$ et la série de terme général $-\ln(1+v_n)$ diverge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-v_n$ diverge.

Ainsi : <u>la série de terme général v_n diverge.</u>

Q5 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1 = \dfrac{1-\operatorname{ch} u_n}{\operatorname{ch} u_n}$.

$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $1 - \operatorname{ch} x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$; $1 - \operatorname{ch} x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 = 1$; $\operatorname{ch} x \underset{0}{\sim} 1$

Ainsi : $\dfrac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: $v_n = \dfrac{1-\operatorname{ch} u_n}{\operatorname{ch} u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.

$v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.

b) $u_n^2 \sim -2v_n$, la série de terme général $-2v_n$ diverge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq 0$!

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

<u>la série de terme général u_n^2 diverge.</u>

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc d'après la question préliminaire si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général u_n^2 converge ... ce qui n'est pas.

Par conséquent <u>la série de terme général u_n diverge.</u>

EDHEC 2000 exercice 2

Dans cet exercice, x désigne un réel élément de $[0,1[$ et n un entier supérieur ou égal à 1.

Q1. a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}\cdot$

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln(k) \leqslant 1.$

Q2. a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de x.

Q3. a) Pour tout x de $]0,1[$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n^2\ln(n)x^n)$.

b) En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.

On pose maintenant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)x^k$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)x^k$.

Q4. Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x est au voisinage de 1^-.

a) Montrer, en utilisant la première question, que : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x^k.$

b) En déduire que : $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1-x}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right) - S_n(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}\cdot$

c) Justifier que : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right) = 0.$

d) En déduire que : $\quad S(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$

---

1) a. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[p, p+1]$.

Par conséquent : $\forall t \in [p,p+1], \ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$; comme $p \leqslant p+1$ il vient alors par intégration :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi : $\dfrac{1}{p+1}\ (p+1-p) \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\ (p+1-p).$

Finalement $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}}$.

b. Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\cdot$

En sommant on obtient : $\displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}\cdot$ Alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{p+1} - 1 \leqslant \int_1^k \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{k}\cdot$

Un léger changement d'indice dans la premire somme et une petite intégration donnent :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - 1 \leqslant \Big[\ln|t|\Big]_1^k = \ln k \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{k}\cdot$ Ainsi : $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \geqslant \frac{1}{k} \geqslant 0.$

Par conséquent $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$. Remarquons que ceci vaut encore pour $k = 1$ $(0 \leqslant 1 - 0 \leqslant 1)$.

Finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1}$.

2) a. Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^p}{p}\Big]_0^x = \frac{x^p}{p}\cdot$

Alors : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

$\boxed{\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t}$.

b. Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$

$\forall t \in [0,x],\ t^n \geqslant 0$ et $\displaystyle 0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$; $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \displaystyle\frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}\cdot$

En intégrant il vient : $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$ car x est positif.

x étant élément de $[0,1[$, on a encore : $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1} = 0$ on obtient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$

Ceci donne sans difficulté : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}\right) = -\ln(1-x).$

$\boxed{\text{La série de terme général } \displaystyle\frac{x^p}{p} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$.

<u>Remarque</u> *Ceci vaut encore si x est élément de $[-1,0[$ et cela se montre en utilisant une démarche analogue. Si x est un réel n'appartenant pas $[-1,1[$, la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ diverge.*

3) a. x est élément de $[0,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n^3\ x^n) = 0^+$ (croissance comparée).

On a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0^+$. Par produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(n^2\ \ln n\ x^n\big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{\ln n}{n}\ n^3\ x^n\Big) = 0^+.$

Remarquons que ceci suffit trs largement pour traiter b.

Cependant supposons maintenant x élément de $]0,1[$. Alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(n^2 \ln n\, x^n\right) = -\infty}$! !

<u>Remarque</u> *La démonstration précédente donne surtout la preuve de l'inutilité de la question...*

b. Nous avons vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \ln n\, x^n\right) = 0$. En utilisant la définition de la limite d'une suite, nous pouvons dire qu'il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant n^2 \ln n\, x^n \leqslant 1$.

Donc : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant \ln n\, x^n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et les rgles de comparaison des séries termes positifs montrent alors que $\boxed{\text{la série de terme général } \ln n\, x^n \text{ converge}}$.

4) a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{k} - S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - \ln k\, x^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(x^k\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right)\right)$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $x^k \geqslant 0$ et $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$.

Donc, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^k\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right) \leqslant x^k$.

En sommant on obtient : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x^k$. Ou $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x^k}$.

b. Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = x\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{x}{1-x}$.

Alors : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$.

Il ne reste plus qu' montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} - x^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)$.

Une petite commutation de sommes donne :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}\frac{x^k}{p} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=p}^{n} x^k\right) = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\,x^p\,\frac{1-x^{n-(p-1)}}{1-x}\right).$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} = \frac{1}{1-x}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\left(x^p - x^{n+1}\right)\right) = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} - x^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right).$$

Ainsi $\boxed{0 \leqslant \dfrac{1}{1-x}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} - x^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right) - S_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x}}$.

c. Q1) b. nous donne : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \ln n \leqslant 1$. Alors : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n$.

En multipliant par x^{n+1}, qui est positif, il vient : $0 \leqslant x^{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leqslant x^{n+1} + x^{n+1}\ln n$.

Comme x est élément de $[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}\ln n\right) = 0$ (croissance comparée).

On obtient alors par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)=0}$.

d. Reprenons l'encadrement de Q4) b. et faisons tendre n vers $+\infty$. Il vient :

$$0\leqslant -\frac{\ln(1-x)}{1-x}-S(x)\leqslant\frac{x}{1-x}\qquad(*)$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}\right)=-\ln(1-x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=S(x)$.

Supposons x dans $]0,1[$. Remarquons alors que $-\dfrac{1-x}{\ln(1-x)}$ est strictement positif et divisons $(*)$ par cette quantité. On vient :

$$0\leqslant 1-\left(-\frac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)}\right)\leqslant-\frac{x}{\ln(1-x)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\dfrac{x}{\ln(1-x)}\right)=0$ car $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1-x)=-\infty$.

Donc par encadrement on obtient : $\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\dfrac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)}\right)=1$.

Alors $-\dfrac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)}\underset{1^-}{\sim}1$. Ceci donne encore : $\boxed{S(x)\underset{1^-}{\sim}-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}}$.

EDHEC 2001 exercice 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal 1, on pose : $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$.

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln(n)$.

On rappelle que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0$.

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

c. En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2) a. Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.

b. En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3) Montrer que la série de terme général u_n converge.

4) a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}\, v_n - 1$.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$.

5) En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.

---

1) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$w_n - w_{n+1} = v_n - \ln n - v_{n+1} + \ln(n+1) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + v_n - v_{n+1} = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

La fonction ln est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes ; en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = (\ln' 1)(x-1) + \ln 1$ ou $y = x - 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant x - 1$.

Ceci permet d'écrire : $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{n}{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{n+1}$.

Ce qui donne : $0 \leqslant -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0.}$$

b. Le cours donne $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Il fournit également $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x)$ donc $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

Alors $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = x - \dfrac{x^2}{2} - x + x^2 + \mathrm{o}(x^2) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).}$$

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Alors

$$\boxed{w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

2) a. Ce qui précède montre que : $w_n - w_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } w_n - w_{n+1} \text{ est convergente.}}$$

b. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ w_n = (w_n - w_1) + w_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$.

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1})$ converge car la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ converge.

Par conséquent la suite de terme général $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$ converge. Alors :

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \geqslant n^2$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

4) a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

Soient a, b et c trois réels.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1} = \dfrac{a(n+1)(2n+1) + b\,n(2n+1) + c\,n(n+1)}{n(n+1)(2n+1)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1} = \dfrac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$ si et seulement si $2a+2b+c=0$, $3a+b+c=0$ et $a=6$.

De plus : $\begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ 2b+c=-12 \\ b+c=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-12-(-18)=6 \\ c=-18-b=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases}$.

Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$v_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + 1 = \frac{1}{2}\,v_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + 1.$$

Alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}\,v_n - 1.}$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) = 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 6v_n + 6\left(v_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(v_{2n+1} - \frac{1}{2}\,v_n - 1\right) = 12v_n - \frac{6n}{n+1} - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24.$$

Alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}.}$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - v_{2n+1} = w_n + \ln n - w_{2n+1} - \ln(2n+1) = w_n - w_{2n+1} - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - v_{2n+1}) = \gamma - \gamma - \ln 2 = -\ln 2$. En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n}{n+1} = 6$ on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24\ln 2$. Ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 18 - 24\ln 2.}$$

EDHEC 2003 exercice 2

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p, +\infty[$ et telle que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} f(k)$.

Q1. a) Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal p, on a :
$S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

Q2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Dans cette question, pour tout réel x de $[2, +\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a) Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).

b) En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

c) La série de terme général R_n est-elle convergente ?

---

1) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$. Supposons d'abord que $n > p$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ \forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leqslant f(t)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p, n-1]\!],\ f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que ceci vaut encore pour $n = p$ car $S_p - f(p) = 0$ et $\displaystyle\int_p^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ S_n - f(p) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et f est positive sur $[p, +\infty[$. Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ S_n \leqslant f(p) \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $f(n)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(p) + \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ converge.}}$$

$\boxed{\textit{Remarque}}$ Ceci est en fait un résultat de cours dans la mesure où f est continue positive et décroissante sur $[p,+\infty[$.

2) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$.

$\forall k \in [\![p,+\infty[\![,\ \forall t \in [k,k+1],\ f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ car f est décroissante sur $[p,+\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p,+\infty[\![,\ f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\forall q \in [\![n,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=n}^{q} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{q} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{q} f(k)$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ ou $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + f(n)$.

Alors $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. Soit n un élément de $[\![p,+\infty[\![$. f est strictement positive sur $[p,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

En divisant l'encadrement précédent par $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ il vient : $1 - \dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \dfrac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant 1$.

Le théorème d'encadrement sur les suites nous indique alors que :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 1$ dès que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\right) = 1$ ou que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 0$.

Ainsi $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dès que $f(n) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$$\boxed{f(n) = \mathrm{o}\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ est une condition suffisante pour que } R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

3) a. $x \to x$ et $x \to (\ln x)^2$ sont continues et strictement positives sur $[2,+\infty[$ donc $x \to x\,(\ln x)^2$ est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$. Alors f est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$.
$x \to x$ et $x \to (\ln x)^2$ sont croissantes et strictement positives sur $[2,+\infty[$ donc $x \to x\,(\ln x)^2$ est croissante et strictement positive sur $[2,+\infty[$. Alors f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

$\forall A \in [2,+\infty[,\ \displaystyle\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A = -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\cdot$

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 2}\cdot$ Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\ln 2}\cdot$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_n^A f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln t}\right]_n^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln n}\right) = \frac{1}{\ln n}\cdot$

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln n}\cdot$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{n\,(\ln n)^2}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n\,\ln n} = 0.$

f est continue, strictement positive, et décroissante sur $[2,+\infty[$.

De plus $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $f(n) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$
.

b. D'après la question 2, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln n}\cdot$

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\,(\ln k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}\cdot}$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,R_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{\ln n}\right) = +\infty$; il existe alors n_0 dans $[\![2,+\infty[\![$ tel que $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ n\,R_n \geqslant 1$.

Alors $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ R_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$. La divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général R_n diverge.

$$\boxed{\text{La série de terme géral } R_n \text{ diverge.}}$$

EDHEC 2006 exercice 2

Q1. a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.

Q2. Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_j$.

Q3. a) Établir que : $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\, u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Q4. a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, où $\dbinom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

b) En utilisant la question **2**, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$, puis montrer que : $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(4^n)$.

Q5. En utilisant le résultat de la question **3**, montrer que : $\dfrac{4^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dbinom{2n}{n}\right)$.

---

1 a) •• Posons $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

Montrons à l'aide d'une récurrence faible que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, u_n est défini et est un réel strictement positif.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ car $u_1 = 1$.

• Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ et montrons la pour n.

Pour tout élément j de $[\![1, n-1]\!]$, u_j est défini et est un réel strictement positif.

Donc $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$ est défini et est un réel strictement positif. Ceci achève la récurrence.

Ainsi en posant : $u_1 = 1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$, on définit une suite de réels strictement positifs.

•• Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une seconde suite de réels strictement positifs telle que $v_1 = 1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ v_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v_j$.

Montrons que cette suite coïncide avec la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Montrons pour ce faire, à l'aide d'une récurrence faible, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n$.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ car $v_1 = 1 = u_1$.

• Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ et montrons la pour n.

$\forall j \in [\![1,n-1]\!],\ v_j = u_j$ donc $v_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v_j = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j = u_n$. Ceci achève la récurrence.

On définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) $u_2 = \dfrac{1}{2\times 2-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{2-1} u_j = \dfrac{1}{3}u_1 = \dfrac{1}{3}\cdot$ $u_3 = \dfrac{1}{2\times 3-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{3-1} u_j = \dfrac{1}{5}(u_1+u_2) = \dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{15}\cdot$

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{3} \text{ et } u_3 = \frac{4}{15}\cdot}$$

2) $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ u_j > 0$ donc : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geqslant u_1 = 1$.

Alors : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geqslant \dfrac{1}{2n-1}\cdot$ Mieux : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{2n-1}$ car $u_1 = 1 \geqslant 1$!

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < 2n-1 \leqslant 2n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{2n-1} \leqslant u_n$.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{2n} \leqslant u_n$ et la série de terme général $\dfrac{1}{2n}$ diverge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

Cette série étant à termes positifs et divergente, la suite de ses sommes partielles est donc croissante et divergente et tend alors vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_j = +\infty.}$$

3 a) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$(2n+1)\,u_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n-1} u_j + u_n = (2n-1)\,u_n + u_n = 2n\,u_n$. Donc $u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\,u_n$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,u_n.}$$

b) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n}{2n+1}\,u_n - u_n = -\dfrac{1}{2n+1}\,u_n < 0$.

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$ car $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}\cdot$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

c) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ on a alors :

$$\boxed{\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{2n}$ étant divergente et à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs permettent de dire que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \text{ diverge.}}$$

d) $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ 0 < u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln u_n - \ln u_{n+1} \geqslant 0.$

Ainsi la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est divergente et à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{u_j}{u_{j+1}}\right) = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Big(\ln(u_j) - \ln(u_{j+1})\Big) = +\infty.$

Ce qui donne encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\ln u_1 - \ln(u_{n+1})\Big) = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\ln u_{n+1} - \ln 1\Big) = -\infty.$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_{n+1} = -\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty.}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{\ln u_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

4 a) Montrons par récurrence que $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}\cdot$

• $u_2 = \dfrac{1}{3}$ et pour $n = 2$, $\dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}} = \dfrac{16}{4\times 2\times\binom{4}{2}} = \dfrac{16}{8\times 6} = \dfrac{1}{3}\cdot$ La propriété est donc vraie pour $n = 2$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,u_n = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}} = \frac{4^n\,n!\,n!}{2(2n+1)\,(2n)!} = \frac{4^n\,(n+1)!\,(n+1)!}{(n+1)\,2(n+1)\,(2n+1)\,(2n)!}\cdot$$

$$u_{n+1} = \frac{4^n\,(n+1)!\,(n+1)!}{(n+1)\,(2n+2)!} = \frac{4^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{4\,(n+1)\,(2n+2)!} = \frac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2(n+1)}{n+1}}\cdot$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n = \frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}\cdot}$$

b) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ n\,u_n = \dfrac{n}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j\right) = +\infty.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n) = +\infty.}$$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{n\,u_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{n\,u_n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} = 0.$ Ainsi :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(4^n).}$$

5) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = 4\,u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = 0.$ Ainsi :

$$\boxed{\frac{4^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\binom{2n}{n}\right).}$$

EDHEC 2008 exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

Q1. On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif.

Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\, \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Q2. a) On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos \dfrac{t}{2} \cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2}\, t\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2k-1}{2}\, t\right)$.

b) En déduire que : $\forall t \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos \dfrac{t}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = \dfrac{1}{2} \left((-1)^n \cos(\dfrac{2n+1}{2} t) - \cos \dfrac{t}{2} \right)$.

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2} t)}{2 \cos \frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}$.

Q3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

---

1) Soit λ un réel non nul. f et $t \to \dfrac{1}{\lambda} \sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Une intégration par parties simple donne alors : $\displaystyle\int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = \left[f(t) \left(\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \right) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t$.

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \left(f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a) - \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t \right).$$

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left(|f(b) \sin(\lambda b)| + |f(a) \sin(\lambda a)| + \left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t \right| \right).$$

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left(|f(b)| |\sin(\lambda b)| + |f(a)| |\sin(\lambda a)| + \int_a^b |f'(t)| |\sin(\lambda t)|\, \mathrm{d}t \right).$$

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\, \mathrm{d}t \right).$$

Comme : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\, \mathrm{d}t \right) \right) = 0$, le théorème d'encadrement donne alors sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\, \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = 0.}$$

Remarque *Ce qui précède donne de la même manière* $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \int_a^b f(t)\, \cos(\lambda t)\, \mathrm{d}t = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. $\cos(a + b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b$ et $\cos(a - b) = \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b$.

En ajoutant ces deux égalités et en divisant par 2 on obtient : $\cos a\, \cos b = \dfrac{1}{2} \big(\cos(a + b) + \cos(a - b) \big)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\dfrac{t}{2}\cos(k\,t) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{t}{2}+k\,t\right)+\cos\left(\dfrac{t}{2}-k\,t\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{2k+1}{2}\,t\right)+\cos\left(\dfrac{1-2k}{2}\,t\right)\right)$.

La fonction cos étant paire on a alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\frac{t}{2}\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)+\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right)\ .}$$

b) Soit t un élément de $[0,1]$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\cos\frac{t}{2}\cos(k\,t)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\,\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)+\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right)\right).$$

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right).$$

Une petite translation d'indice au niveau de la seconde somme donne :

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right).$$

Ou : $\cos\dfrac{t}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)$. En simplifiant il vient :

$\cos\dfrac{t}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).}$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Observons que $\forall t \in [0,1],\ \cos\dfrac{t}{2} \neq 0$. Alors, par division, la question précédente fournit :

$\forall t \in [0,1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = \frac{1}{2}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$. Ou :

$\forall t \in [0,1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$.

En intégrant entre 0 et 1, et par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t\right) = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^k\displaystyle\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k}\Big[\sin(k\,t)\Big]_0^1 = (-1)^k\frac{\sin k}{k} = u_k$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}u_k = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.}$$

3) Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|$.

Considérons alors la fonction $g : t \to \dfrac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right|.$$

La première question donne : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = 0$ car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t = 0.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\,\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right| = 0.$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{1}{2}\cdot$ Ce qui signifie que la série de terme général u_n est convergente et de somme $-\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n = (-1)^n\,\frac{\sin n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}\cdot}$$

EDHEC 2013 exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n\,(n+1)$.

a) Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.

On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a $a_n = n!$.

a) Écrire une déclaration de fonction Pascal dont l'en-tête est **function fact (n : integer) : integer ;** et qui renvoie $n!$ à l'appel de fact(n)

b) Écrire le corps principal d'un programme Pascal, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et d'afficher la valeurs de u_n lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}\cdot$

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}\cdot$

e) En déduire que la série de terme généneral u_n converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

On revient au cas général.

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + 2 + \cdots + n\right)^2 \leqslant \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\right)\cdot$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\cdot$

b) En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}\cdot$

c) Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge puis établir le résultat demanté.

---

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1) - n}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\cdot}$$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{r} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{r+1}$ par "télescopage".

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \lim_{r\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{6}\,(2n+1+3).$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+4)}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}.$$

Alors $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \dfrac{n}{\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}} = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{(n+1)\,(n+2)}.}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)} = \dfrac{3}{a_{n+1}}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge, la série de terme général $\dfrac{3}{a_{n+1}}$ converge également.

Alors la série de terme général u_n converge. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{1\,(1+1)}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}.}$$

► *Remarque Il était sans doute plus rapide d'utiliser la même méthode que dans* **1) a)** *et d'écrire que :*

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} u_n = 3\sum_{n=1}^{r} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+2}\right) \cdots$ ◄

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2} \leqslant 2 = 2 \times 1 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.}$$

2) a) et b) Nous allons regrouper le tout dans un même programme. Nous écrirons une version récursive de fact (fonction fact) et une version itérative de fact (fonction fact2).

Calculer $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ en appelant à chaque fois la fonction fact est une hérésie. Nous donnerons donc une fonction qui calcule honorablement u_n (fonction u) et nous écrirons aussi ce qu'attend le concepteur (programme principal).

```
Program Edhec_2013;

function fact(n:integer):integer;

Begin if n=0 then fact:=1
             else fact:=n*fact(n-1); end;

function fact2(n:integer):integer;

var k,a:integer;

begin
a:=1;
for k:=1 to n do a:=a*k;
fact2:=a;
end;

function u(n:integer):real;

var k,f,s:integer;

begin
f:=1;s:=1;
for k:=2 to n do
    begin
    f:=f*k;s:=s+f;
    end;
u:=n/s;
end;

var n,k,ubu:integer;

begin

write('Donner n. n=');readln(n);

ubu:=1;

for k:=2 to n do ubu:=ubu+fact(k);

writeln('u_',n,'=',n/ubu);

end.
```

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1^n}{n!}\cdot$ Or le cours indique que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge.}}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k! \geqslant n! > 0$. Donc $\dfrac{1}{n!} \geqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ et $n \geqslant 0$. Alors :

$$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = u_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\cdot}$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ car les deux séries convergent.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} = \mathrm{e} - 1.$

Or $2 \leqslant \mathrm{e}$ donc $2 \leqslant 2\,\mathrm{e} - \mathrm{e}$ et ainsi $\mathrm{e} \leqslant 2\left(\mathrm{e}-1\right)$. Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2\left(\mathrm{e}-1\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot}$$

On revient au cas général.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit $< .,. >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme associée.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\left(\mathbb{R}^n, < .,. >\right)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Ce qui revient à dire que :

$\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x_k\,y_k\right)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$. Ou que :

$\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x_k\,y_k\right)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.

Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k > 0$. Alors : $\left(1+2+\cdots+n\right)^2) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2$.

Alors ce qui précède permet d'écrire que : $\left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a_k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)$. Donc :

$$\left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right) = \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot}$$

Ou :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\cdot}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Notons que : $4\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=4\,\dfrac{(n+1)^2-n^2}{\big(n\,(n+1)\big)^2}=4\,\dfrac{n^2+2n+1-n^2}{\big(n\,(n+1)\big)^2}=4\,\dfrac{2n+1}{\big(n\,(n+1)\big)^2}=\dfrac{2n+1}{\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2}\cdot$

Or $\dfrac{n\,(n+1)}{2}=1+2+\cdots+n$ donc $4\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{2n+1}{(1+2+\cdots+n)^2}\cdot$

Rappelons que $\big(1+2+\cdots+n\big)^2\leqslant\big(a_1+a_2+\cdots+a_n\big)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{4}{a_2}+\cdots+\dfrac{n^2}{a_n}\right)$.

De plus $\big(1+2+\cdots+n\big)^2$ et $a_1+a_2+\cdots+a_n$ sont strictement positifs. Alors :

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{1}{\big(1+2+\cdots+n\big)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)=\frac{1}{\big(1+2+\cdots+n\big)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$$

De plus $2n+1$ est positif, ainsi : $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\dfrac{2n+1}{\big(1+2+\cdots+n\big)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}=4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot}$$

b) Soit N dans $\mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)\cdot$ Transformons le second terme.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right)\cdot$ En commutant les deux sommes il vient :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)=4\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right)=4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right].$$

Un petit "télescopage" donne alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)=4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right].$

Or $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{k^2}{a_k}\geqslant 0$ et $\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(N+1)^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{k^2}$ donc $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{k^2}{a_k}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(N+1)^2}\right)\leqslant\dfrac{k^2}{a_k}\,\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{a_k}\cdot$ Donc :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)=4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right]\leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$$

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)\leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot}$$

c) La série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ est convergente (par hypothèse) et à termes positifs donc $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}\cdot$

Alors $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}\cdot$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $4\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}\cdot$ Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \text{ converge.}}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_n=\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot$

$0\leqslant n\leqslant n+\dfrac{1}{2}$ et $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$ donc $0\leqslant u_n=\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\dfrac{n+\frac{1}{2}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge donc il en est de même pour la série de terme général $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\cdot$

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

De plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{1}{2}\left(4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\right)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\cdot}$$