ECRICOME 1992

EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est 1 - a.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est 1 - a.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est 1 - a.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

3°) Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \frac{1}{4}$

4°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.

c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°) On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

ECRICOME 1993

EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1°) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si :
$(a-\lambda^2)(d-\lambda^2) - bc = 0$

b) En déduire l'équivalence suivante :
<u>λ est valeur propre de $\phi(A)$ $\Leftrightarrow$ λ^2 est valeur propre de A.</u>

c) Exemple : si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$?
$\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

2°) On suppose maintenant que <u>$a = 1$ et $b = 0$</u>.

a) Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $V(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer V(1) et V(-1), ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

(ii) Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

b) Etablir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \text{ et } c = 0) \\ \text{ou} \\ (d \rangle 0 \text{ et } d \neq 1) \end{cases}$

c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

(i) c et d sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

(ii) c et d sont des *réels* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas (i) et (ii) précédents.

ECRICOME 1995

EXERCICE 1

Recherche des valeurs propres d'un endomorphisme

Dans cet exercice :
E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X+1) \cdot P(X) - (X^2-1) \cdot P'(X)$$

1° Montrer que f est un endomorphisme de E.

2° Soit B un vecteur propre pour f, c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation : $f(B) = \lambda B$.

a) Montrer que B est nécessairement de degré 2.

b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B.
Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \quad \text{avec} \quad A(-1) \neq 0$$

Montrer que $k = 2$ et que A est constant.
En déduire que $\lambda = 3$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que -1 et 1 sont racines de B. En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.

3° Étude d'un cas particulier
Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.

a) Montrer que g est un endomorphisme de F.

b) Écrire la matrice A de g relativement à la base $\mathbf{B}$.

c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

d) Expliciter alors A^n en fonction de n.

ECRICOME 1998

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$x \to F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1 - Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2 - Déterminer F dans les cas suivants :

a) $x \to f(x) = \sin 2\pi x$;

b) $x \to f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 - Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $f \to T(f) = F$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Est-elle injective ? surjective ?

4 - On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

a) Montrer que 0 est valeur propre de T.

b) Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.

c) Etudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 **Ecricome 1999 ex 2**

Q1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

Q2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (0 \quad 0 \quad 0)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (0 \quad 0 \quad 0)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

Q3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. *Calcul de V^n*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

Q5. *Calcul de U_n.*

a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.

Calculer MX puis $M^n X$.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Exercice 1 **Ecricome 2004 ex1**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$!

On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

Dans toute la suite k est un entier naturel impair fixé.

Q1 Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale (on expliquera la manière dont on construit P).

Q2 On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \left(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k)\right)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

Q3 Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

JF Ainsi $S = U(S^k)$.

Q4 Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $AS^{pk} = S^{pk}A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $AS = SA$.

Q5 On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

ECRICOME 2010 Ex 2

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme : $f(P) = P'' - 4XP'$.

1. Etude de f. Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

(a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

(c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

(d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.

En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que $(\mathcal{E}_n)$: $f(H_n) = -4nH_n$.

Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1.

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) En dérivant la relation $\mathcal{E}_n$, démontrer que : $\forall n \geqslant 1,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad H_n' = nH_{n-1}$ et $\forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \dfrac{n-1}{4}H_{n-2} = 0$.

(b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$? Calculer alors H_2 et H_3.

(c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} - \frac{n-1}{4}u_{n-2}.$$

Écrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par : $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y,\ y \neq z \text{ et } z \neq x\}$ ainsi que la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

(a) Établir que (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si (α,β,γ) est solution du système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

(b) On introduit le polynôme $Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.

Montrer que (α,β,γ) est solution du système $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ.

(c) Prouver que si (α,β,γ) est un point critique de V alors $Q'' - 4XQ' = -12Q$, puis que $Q = H_3$ (cf. question 2.b).

Donner alors les points critiques de V.