Exercice 1 **Ecricome 2004 ex1**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$!

On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

Dans toute la suite k est un entier naturel impair fixé.

Q1 Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale (on expliquera la manière dont on construit P).

Q2 On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \big(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, , T(\lambda_n^k)\big)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

Q3 Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

JF Ainsi $S = U(S^k)$.

Q4 Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\quad AS^{pk} = S^{pk}A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $\quad AS = SA$.

Q5 On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

Q1 S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes donc S est diagonalisable. Alors :

$$\boxed{\text{il existe une matrice inversible } P \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } P^{-1}SP \text{ soit une matrice diagonale } D.}$$

Q2 a) • Soient V et W deux éléments de E et α un réel.

$f(\alpha\, V + W) = \Big((\alpha\, V + W)(\lambda_1^k), (\alpha\, V + W)(\lambda_2^k), \ldots, (\alpha\, V + W)(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha\, V + W) = \Big(\alpha\, V(\lambda_1^k) + W(\lambda_1^k), \alpha\, V(\lambda_2^k) + W(\lambda_2^k), \ldots, \alpha\, V(\lambda_n^k) + W(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha\, V + W) = \alpha \left(V(\lambda_1^k), V(\lambda_2^k), \ldots, V(\lambda_n^k)\right) + \left(W(\lambda_1^k), W(\lambda_2^k), \ldots, W(\lambda_n^k)\right)$.

$f(\alpha\, V + W) = \alpha\, f(V) + f(W)$. f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit T un élément de $\operatorname{Ker} f$. $f(T) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ T(\lambda_i^k) = 0$.

Rappelons alors que $x \to x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car k est $\boxed{\text{impair}}$. Cette application est donc injective.

Les réels λ_1, λ_2, ..., λ_n étant deux à deux distincts il en est alors de même pour les réels λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_n^k.

T est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ qui a au moins n racines distinctes. Ainsi T est le polynôme nul.

Par conséquent $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et f est injective.

f est alors une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^n$ et $\dim E = (n-1)+1 = n = \dim \mathbb{R}^n < +\infty$ donc :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de } E \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$$

b) Soit T un élément de E.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ T(\lambda_i^k) = \lambda_i \iff f(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \iff T = f^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe un unique élément } U \text{ de } E \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!],\ U(\lambda_i^k) = \lambda_i\ ;\ U = f^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).}$$

Q3 Montrons que $R(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, c'est à dire que $U(D^k) = D$.

Jouons la "difficulté" en reprenant la logique de la première question et en supposant que P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale D (et pas plus...).

Il existe alors un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Nous écrirons plus simplement $D = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

S et D sont semblables donc ont même spectre. Alors $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\} = \operatorname{Sp} D = \operatorname{Sp} S = \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n\}$.

Il existe un élément $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $U = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, X^i$.

$$U(D^k) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(D^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, D^{ki} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}^{ki} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \begin{pmatrix} \alpha_1^{ki} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{ki} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^{ki} \end{pmatrix}.$$

$$U(D^k) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_1^k)^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_2^k)^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(\alpha_n^k)^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(\alpha_1^k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U(\alpha_2^k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & U(\alpha_n^k) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $U(D^k) = \operatorname{Diag}\big(U(\alpha_1^k), U(\alpha_2^k), \ldots, U(\alpha_n^k)\big)$.

Pour montrer que $U(D^k) = D$ il ne reste plus qu'à montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ U(\alpha_i^k) = \alpha_i$.

Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$. Il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_i = \lambda_j$. Alors $U(\alpha_i^k) = U(\lambda_j^k) = \lambda_j = \alpha_i$.

Finalement $U(D^k) = \operatorname{Diag}\big(U(\alpha_1^k), U(\alpha_2^k), \ldots, U(\alpha_n^k)\big) = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D$.

Donc $R(D) = U(D^k) - D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } D.}$$

Il existe un élément $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} r_i\, X^i$.

Rappelons que $D = P^{-1}SP$ donc $S = PDP^{-1}$ et $\forall i \in \mathbb{N},\ S^i = PD^iP^{-1}$ (récurrence simple).

$R(S) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\, S^i = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\, PD^iP^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i\, D^i\right)P^{-1} = PR(D)P^{-1} = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } S.}$$

Q4 a) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A$.

- L'égalité est vraie pour $p = 0$ car dans ce cas $S^{pk} = I_n$.
- Supposons l'égalité vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$AS^{pk} = S^{pk}A$. En multipliant à droite par S^k il vient $AS^{pk}S^k = S^{pk}AS^k$ ou $AS^{(p+1)k} = S^{pk}AS^k$.

En remarquant que $AS^k = S^kA$ on obtient : $AS^{(p+1)k} = S^{pk}S^kA = S^{(p+1)k}A$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A.}$$

b) Rappelons que $U = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, X^p$ et que $U(S^k) - S = R(S) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $S = U(S^k) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, (S^k)^p = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}$.

Alors $AS = AU(S_k) = A\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, AS^{pk} = \sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}A = \left(\sum_{p=0}^{n-1} u_p\, S^{pk}\right)A = U(S^k)A = SA$.

$$\boxed{A \text{ et } S \text{ commutent.}}$$

Q5 a) Observons que $S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; alors 1 est valeur propre de S.

De même $S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; -1 est valeur propre de S.

Notons que 1 et -1 sont alors LES valeurs propres de S car S est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S \text{ possède deux valeurs propres distinctes.}}$$

b) $S^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$. Alors $\forall r \in \mathbb{N},\ S^{2r} = (S^2)^r = I_2^r = I_2$. Il est alors clair que :

$$\boxed{A \text{ commute avec toute puissance paire de } S.}$$

$AS = \begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\2&2\end{pmatrix}$ et $SA = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$. Alors $AS \neq SA$ et ainsi :

$$\boxed{A \text{ ne commute pas avec } S.}$$

ECRICOME 2010 Ex 2

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme : $\quad f(P) = P'' - 4XP'$.

1. Etude de f. Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

(a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

(c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

(d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.

En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que $(\mathcal{E}_n)$: $\quad f(H_n) = -4nH_n$.

Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1.

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) En dérivant la relation $\mathcal{E}_n$, démontrer que : $\quad \forall n \geqslant 1,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

En déduire que : $\quad \forall n \geqslant 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \dfrac{n-1}{4} H_{n-2} = 0$.

(b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$? Calculer alors H_2 et H_3.

(c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} - \frac{n-1}{4} u_{n-2}.$$

Écrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\quad U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y,\ y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$ ainsi que la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x - y| - \ln|y - z| - \ln|z - x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

(a) Établir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

(b) On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.

Montrer que (α, β, γ) est solution du système $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ.

(c) Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V alors $Q'' - 4XQ' = -12Q$, puis que $Q = H_3$ (cf. question 2.b).

Donner alors les points critiques de V.

► **Dans tout l'exercice nous écrirons $\mathbf{f_n}$ à la place de f**

1. Étude de f_n.

(a) • Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus n. Ainsi P' est un polynôme à coefficients réels de degré au plus $n-1$ et P'' est un polynôme à coefficients réels de degré au plus $n-2$.

Alors P'' et XP' sont deux polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Finalement $f_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

• Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit λ un réel.

$f_n(\lambda\, P + Q) = (\lambda\, P + Q)'' - 4\, X\, (\lambda\, P + Q)' = \lambda\, P'' + Q'' - 4\, X\, (\lambda\, P' + Q') = \lambda(P'' - 4\, X\, P') + (Q'' - 4\, X\, Q')$.

$f_n(\lambda\, P + Q) = \lambda\, f_n(P) + f_n(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ f_n(\lambda\, P + Q) = \lambda\, f_n(P) + f_n(Q)$. Finalement :

$$\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) $f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} - 4\, X \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $f_n(X) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} - 4\, X \times 1 = -4\, X$.

$\forall k \in [\![2, n]\!], f_n(X^k) = k\, (k-1)\, X^{k-2} - 4\, X\, (k\, X^{k-1}) = -4k\, X^k + k\, (k-1)\, X^{k-2}$.

$$\boxed{f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]},\ f_n(X) = -4\, X \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!], f_n(X^k) = -4k\, X^k + k\, (k-1)\, X^{k-2}.}$$

D'après ce qui précède, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, $f_n(X^k)$ est comme combinaison linéaire d'éléments de la famille $(1, X, \ldots, X^k)$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{\text{la matrice } A_n \text{ de } f_n \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_n[X] \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

(c) A_n est triangulaire supérieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Alors $\operatorname{Sp} f_n = \operatorname{Sp} A_n = \{-4\, k\, ;\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

La suite $(-4\, k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ étant strictement décroissante, f_n possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Comme f_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$:

$$\boxed{f_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Sachant que f_n possède $n+1$ sous-espaces propres de dimension nécessairement au moins un et que la somme des dimensions des sous espaces propres de f_n n'exède pas la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est $n+1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{chacun des sous-espaces propres de } f_n \text{ est de dimension } 1.}$$

(d) Soit P un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ. Soit r son degré et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré. $r \in [\![0, n]\!]$ et $a_r \neq 0$.

$f_n(P) = \lambda\, P$ donc $P'' - 4\, X\, P' = \lambda\, P$.

Le coefficient de X^r dans $P'' - 4\, X\, P'$ est $-4\, (r\, a_r)$ et le coefficient de X^r dans $\lambda\, P$ est $\lambda\, a_r$.

Alors $-4\, (r\, a_r) = \lambda\, a_r$. Or a_r n'est pas nul donc $\lambda = -4\, r = -4 \deg P$.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un vecteur propre de } f_n \text{ associé à la valeur propre } \lambda : \lambda = -4 \deg P\ .}$$

• Existence de H_n.

$-4\,n$ est une valeur propre de f_n. Soit P_n un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $-4\,n$.

D'après ce qui précède : $-4\,n = -4 \deg P_n$. Alors $\deg P_n = n$. Notons a_n le coefficient de X^n dans P_n et posons $H_n = \dfrac{1}{a_n}\, P_n$.

Par construction H_n est un polynôme unitaire. De plus, le degré de H_n est celui de P_n donc est n.

Comme $H_n = \dfrac{1}{a_n}\, P_n$ et que P_n est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $-4\,n$, il est de même pour H_n.

Finalement H_n est un polynôme unitaire de degré n tel que $f_n(H_n) = -4\,n\,H_n$.

• Unicité de H_n.

Supposons que Q_n soit encore un polynôme unitaire de degré n tel que $f_n(Q_n) = -4\,n\,Q_n$.

Alors Q_n et H_n sont deux éléments non nuls du sous-espace propre de f_n associé à la valeur propre $-4\,n$ qui est de dimension 1.

Ainsi il existe un réel α (non nul) tel que $Q_n = \alpha\, H_n$.

Le coefficient de X^n de Q_n est alors le même que le coefficient de X^n dans $\alpha\, H_n$.

Comme Q_n et H_n sont unitaires et de degré $n : 1 = \alpha$.

Ainsi $Q_n = H_n$. D'où l'unicité de H_n.

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ tel que } f_n(H_n) = -4\,n\,H_n.}$$

Ou encore :

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ tel que } H_n'' - 4\,X\,H_n' = -4\,n\,H_n.}$$

2. Étude de la suite $(\mathbf{H_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $f_n(H_n) = -4\,n\,H_n$ donc $H_n'' - 4\,X\,H_n' = -4\,n\,H_n$.

En dérivant il vient $H_n''' - 4\,H_n' - 4\,X\,H_n'' = -4\,n\,H_n'$ ou $H_n''' - 4\,X\,H_n'' = -4\,(n-1)\,H_n'$.

Ainsi $(H_n')'' - 4\,X\,(H_n')' = -4\,(n-1)\,H_n'$. Comme H_n' appartient à $\mathbb{R}_n[X] : f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n'$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n'.\ \text{Je préfère} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (H_n')'' - 4\,X\,(H_n')' = -4\,(n-1)\,H_n'.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

H_n est unitaire et de degré n. Alors H_n' est un polynôme de degré $n-1$ et le coefficient de X^{n-1} dans H_n' est n.

Posons $T_n = \dfrac{1}{n}\, H_n'$. Alors T_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$.

Comme $f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n' : f_n(T_n) = -4\,(n-1)\,T_n'$ car $T_n = \dfrac{1}{n}\, H_n'$.

Ainsi T_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que $T_n'' - 4\,X\,T_n' = -4\,(n-1)\,T_n$.

D'après **1. (d)** H_{n-1} est l'unique polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que $H_{n-1}'' - 4\,X\,H_{n-1}' = -4\,(n-1)\,H_{n-1}$.

Ainsi $T_n = H_{n-1}$ donc $\dfrac{1}{n}\, H'_n = H_{n-1}$. $H'_n = n\, H_{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ H'_n = n\, H_{n-1}.}$$

Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$H'_n = n\, H_{n-1}$ et $H'_{n-1} = (n-1)\, H_{n-2}$ donc $H''_n = n\, H'_{n-1} = n\,(n-1)\, H_{n-2}$.

Alors $-4\, n\, H_n = H''_n - 4\, X\, H'_n = n\,(n-1)\, H_{n-2} - 4\, X\,(n\, H_{n-1})$. $-4\, n\, H_n = n\,(n-1)\, H_{n-2} - 4\, X\,(n\, H_{n-1})$.

En divisant par $-4\, n$ qui n'est pas nul on obtient : $H_n = -\dfrac{n-1}{4}\, H_{n-2} + X\, H_{n-1}$.

Donc $H_n - X\, H_{n-1} + \dfrac{n-1}{4}\, H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2, +\infty[\![,\ H_n - X\, H_{n-1} + \frac{(n-1)}{4}\, H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.}$$

(b) 1 est un polynôme unitaire de degré 0 qui vérifie $(1)'' - 4\, X\,(1)' = -(4 \times 0)\, 1$ donc $1 = H_0$.

X est un polynôme unitaire de degré 1 qui vérifie $(X)'' - 4\, X\,(X)' = -(4 \times 1)\, 1$ donc $X = H_1$.

$$\boxed{H_0 = 1 \text{ et } H_1 = X.}$$

$0_{\mathbb{R}_2[X]} = H_2 - X\, H_1 + \dfrac{2-1}{4}\, H_0 = H_2 - X^2 + \dfrac{1}{4}$. Alors $H_2 = X^2 - \dfrac{1}{4}$.

$0_{\mathbb{R}_3[X]} = H_3 - X\, H_2 + \dfrac{3-1}{4}\, H_1 = H_3 - X\left(X^2 - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\, X = H_3 - X^3 + \dfrac{3}{4}\, X$. Alors $H_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}\, X$.

$$\boxed{H_2 = X^2 - \frac{1}{4} \text{ et } H_3 = X^3 - \frac{3}{4}\, X.}$$

(c) Rappelons que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$; et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = u_{n-1} - \dfrac{(n-1)\, u_{n-2}}{4}$.

```
program Ecricome2010_Ex2;
var n:integer;u,v,w:real;
begin
u:=1;v:=1;
for n:=2 to 2010 do
   begin
   w:=v-(n-1)*u/4;
   u:=v; v:=w;
   end;
writeln('u_2010 vaut : ',v);
end.
```

3. Application aux points critiques d'une fonction de trois variables.

(a) Montrons que V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$(x,y,z) \to x^2+y^2+z^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme fonction polynôme.

$(x,y,z) \to x-y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme fonction polynôme et ne s'annule pas sur U. Comme $t \to \ln|t|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, par composition $(x,y,z) \to \ln|x-y|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

De même $(x,y,z) \to \ln|y-z|$ et $(x,y,z) \to \ln|z-x|$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

V est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme combinaison linéaire de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = 2x - \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{(-1)}{z-x} = 2x - \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x-z} = \dfrac{2x(x-y)(x-z)-(x-z)-(x-y)}{(x-y)(x-z)}$.

$\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x(x-y)(x-z)-(2x-y-z)}{(x-y)(x-z)}$.

De même : $\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{2y(y-x)(y-z)-(2y-x-z)}{(y-x)(y-z)}$.

On a encore : $\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{2z(z-x)(z-y)-(2z-x-y)}{(z-x)(z-y)}$.

Soit (α,β,γ) un élément de U.

$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \dfrac{\partial V}{\partial x}(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{\partial V}{\partial z}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$

$$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \dfrac{2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)-(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0 \\ \dfrac{2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)-(2\beta-\alpha-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = 0 \\ \dfrac{2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)-(2\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)-(2\alpha-\beta-\gamma) = 0 \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)-(2\beta-\alpha-\gamma) = 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)-(2\gamma-\alpha-\beta) = 0 \end{cases}.$$

$$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Un point } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ de } U \text{ est un point critique de } V \text{ si et seulement si : } \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \quad (\mathcal{S}). \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}}$$

(b) $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ donc $Q' = (X-\beta)(X-\gamma)+(X-\alpha)(X-\gamma)+(X-\alpha)(X-\beta)$.

$Q'' = (X-\gamma)+(X-\beta)+(X-\gamma)+(X-\alpha)+(X-\beta)+(X-\alpha) = 2\big(3X-(\alpha+\beta+\gamma)\big)$.

Soit (α,β,γ) un élément de U.

Notons que : $Q''(\alpha)-4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 2\big(3\,\alpha-(\alpha+\beta+\gamma)\big)-4\,\alpha\,\big((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+0+0\big) = 2\,\big((2\,\alpha-\beta-\gamma)-2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\big)$.

Alors $Q''(\alpha)-4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 0 \iff 2\,\big((2\,\alpha-\beta-\gamma)-2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\big) = 0 \iff 2\,\alpha-\beta-\gamma = 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)$.

Finalement : $Q''(\alpha)-4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 0 \iff 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma) = 2\,\alpha-\beta-\gamma$.

De même $Q''(\beta)-4\,\beta\,Q'(\beta) = 0 \iff 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma$.

On a encore $Q''(\gamma)-4\,\gamma\,Q'(\gamma) = 0 \iff 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta$.

$$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un élément de } U \text{ et } Q=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma).\ (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \text{ si et seulement} \\ \text{si } Q''-4\,X\,Q' \text{ admet pour racines } \alpha,\ \beta,\ \gamma.\end{array}}$$

(c) Soit (α, β, γ) un point critique de V. (α, β, γ) est un élément de U. Alors α, β, γ sont distincts deux à deux.

Posons $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. α, β, γ sont alors trois racines distinctes de $Q'' - 4XQ'$.

Ainsi Q divise $Q'' - 4XQ'$. Il existe un élément T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' - 4XQ' = T\,Q$.

Q est de degré 3 donc Q' est de degré 2 et Q'' est de degré 1. Ainsi $Q'' - 4XQ'$ est de degré 3.

Alors nécessairement T est un polynôme constant.

Finalement il existe un réel c tel que $Q'' - 4XQ' = c\,Q$.

Le coefficient de X^3 dans Q est c et c'est -4×3 dans $Q'' - 4XQ'$. Ainsi $c = -12$ donc $Q'' - 4XQ' = -12\,Q$.

$$\boxed{Q'' - 4XQ' = -12\,Q.}$$

Q est donc un polynôme unitaire de degré 3 qui vérifie $Q'' - 4XQ' = -4\,(3)\,Q$ donc d'après **1. (d)**, $Q = H_3$.

$$\boxed{\text{Si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un point critique de } V \text{ et si } Q=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \text{ alors } Q=H_3.}$$

En bref :

$$\boxed{\text{Si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un point critique de } V : H_3=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma).}$$

• Soit (α, β, γ) un point critique de V. Alors $H_3 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ donc α, β, γ sont trois racines distinctes (car (α, β, γ) est dans U) de H_3.

Or $H_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}X$ donc H_3 a exactement trois racines 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi (α, β, γ) appartient à l'ensemble

$\mathcal{H} = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \right\}$.

• Réciproquement soit (α, β, γ) un élément de l'ensemble $\mathcal{H}$.

α, β, γ sont deux à deux distincts dons (α, β, γ) est un élément de U.

Posons $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. $Q = H_3$! !

Alors $Q'' - 4\,X\,Q' = -12Q = -12\,(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. Donc α, β, γ sont des racines de $Q'' - 4\,X\,Q'$. Alors (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ et ainsi (α, β, γ) est un point critique de V.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les points critiques de } V \text{ sont } \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right) \\ \text{et } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right).\end{array}}$$
