ECRICOME 1992

EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est $1 - a$.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est $1 - a$.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est $1 - a$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

3°) Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \dfrac{1}{4}$

4°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.

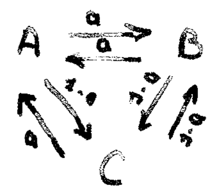
c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°) On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 (Q1) .. Soit $n \in \mathbb{N}$.



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}/A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}/B_n)p(B_n) + p(A_{n+1}/C_n)p(C_n)$

$p(A_{n+1}) = 0\,p(A_n) + a\,p(B_n) + 0\,p(C_n)$

de la même manière $p(B_{n+1}) = a\,p(A_n) + 0\,p(B_n) + (1-a)\,p(C_n)$

$p(C_{n+1}) = (1-a)p(A_n) + (1-a)p(B_n) + 0\,p(C_n)$

donc
$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} p(A_{n+1}) \\ p(B_{n+1}) \\ p(C_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,p(B_n) + a\,p(C_n) \\ a\,p(A_n) + (1-a)p(C_n) \\ (1-a)p(A_n) + (1-a)p(B_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = MX_n$$

<u>Remarque</u>.. Le problème était ici presque terminé. En effet posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a b_n + a c_n = a(b_n + c_n) = a[1 - a_n] = -a a_n + a \\ b_{n+1} = a a_n + (1-a) c_n \\ c_{n+1} = (1-a)(a_n + b_n) = (1-a)(1-c_n) = -(1-a)c_n + 1 - a \end{cases}$$

$(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites arithmético-géométriques.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x = -ax + a \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{1+a}$ et $x = -(1-a)x + (1-a) \Leftrightarrow x = \dfrac{1-a}{2-a}$

$\left(a_n - \dfrac{a}{1+a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-a$ et $\left(c_n - \dfrac{1-a}{2-a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-(1-a)$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-a)^n\left[a_0 - \dfrac{a}{1+a}\right] + \dfrac{a}{1+a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{a}{1+a}$ $(|a|<1)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = (a-1)^n\left[c_0 - \dfrac{1-a}{2-a}\right] + \dfrac{1-a}{2-a}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1-a}{2-a}$ $(|a-1|<1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = a a_n + (1-a)c_n = -(-a)^{n+1}\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] - (a-1)^{n+1}\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{a^2}{1+a} + \frac{(1-a)^2}{2-a}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = (-a)^n\left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)}.$$

Il est aisé de vérifier que cette formule vaut encore pour $n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-a)^n\left[\dfrac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\dfrac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \dfrac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$

Bravo pour le concepteur qui en 4 pages n'arrive pas à nous donner ce que l'on pouvait obtenir en 1/2 page

(Les résultats sont donnés pour $a = 1/4$!)

Q2 a) $N=\begin{bmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$; $N\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1-a\\a+1-a\\a+1-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $1\in \operatorname{Spec}(N)$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de N.

b) et c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $N-\lambda I_3=\begin{bmatrix} -\lambda & a & 1-a \\ a & -\lambda & 1-a \\ a & 1-a & -\lambda \end{bmatrix}$ cherchons une réduite de Gauss de cette matrice.

$$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ a & -\lambda & 1-a \\ -\lambda & a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow[a\neq 0]{} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1+a & 1-a+\lambda \\ 0 & +\lambda\frac{1-a}{a}+a & \frac{-\lambda^2}{a}+1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$$

1er cas : $\lambda=a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftrightarrow L_3$. Cette matrice n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec un zéro sur la diagonale) donc $N-\lambda I_3$ n'est pas inversible. $\lambda\in \operatorname{Spec} N$

2ème cas : $\lambda\neq a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda+1-a}L_2$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ avec $t=\lambda(1-a)+a^2-\lambda^2+a-a^2=-\lambda^2+(1-a)\lambda+a$

$t=-(\lambda-1)(\lambda+a)$

Dans ce cas $N-\lambda I_3$ est non inversible ssi $t=0$ soit $\lambda=1$ ou $\lambda=-a$.

IMPORTANT

Notons que dans ce cas $\lambda\neq a-1$ donc $\lambda=1$ exige $a-1\neq 1$, c'est à dire $a\neq 2$ ce qui est !

$\lambda=-a$ exige $a-1\neq -a$ soit $a\neq 1/2$ ce qui n'est pas toujours !

Conclusion : $a = \frac{1}{2}$. $\mathrm{Spec}(N) = \{\frac{1}{2} - 1, 1\} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$

$a \neq \frac{1}{2}$ $\mathrm{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$

Ex1 p4

d) P^{-1} n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et

$(X-1)^2 = X^2-2X+1$, $X^2-1 = X^2-1$!, $(X+1)^2 = X^2+2X+1$.

$$X = \frac{1}{4}\left[(X+1)^2-(X-1)^2\right] = -\frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$1 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1-2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$X^2 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1+2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

Finalement $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & -(-1)^n & (-1)^n \\ -2 & 0 & 2 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n+2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n-2+3^n \\ -2(-1)^n+2\times3^n & 2(-1)^n+2\times3^n & -2(-1)^n+2\times3^n \\ (-1)^n-2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n+2+3^n \end{bmatrix}$$

ECRICOME 1998

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$x \to F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1 - Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2 - Déterminer F dans les cas suivants :

a) $x \to f(x) = \sin 2\pi x$;

b) $x \to f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 - Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $f \to T(f) = F$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Est-elle injective ? surjective ?

4 - On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

a) Montrer que 0 est valeur propre de T.

b) Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.

c) Etudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

Q1 Soit $f \in E$. Notons φ_f une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_x^{x+1} f(t)dt$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x, x+1]$

Par conséquent F est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \varphi_f(x+1) - \varphi_f(x)$.

φ_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_f = f$; par une composition banale, $x \mapsto \varphi_f(x+1)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto \varphi'_f(x+1)$. Par soustraction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \varphi'_f(x+1) - \varphi'_f(x) = f(x+1) - f(x)$, en particulier F est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement <u>1°.. F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>2°.- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.</u>

Q2 a) $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)dt = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi t)\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi(x+1)) - \cos(2\pi x)\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x)\right] = 0.$$

<u>Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.</u>

b) $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = 1-x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$. Récap :

$\forall x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = 1-x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Ainsi f est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ car $x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Donc f est continue en tout point de $]-\infty, 1[$ et de $]1, +\infty[$ et f est continue à droite et à gauche en 1.

Finalement f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

c) <u>f est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

Avant de déterminer F observons que

- Si $x \in]-\infty, 0[$, $[x, x+1] \subset]-\infty, 1[$
- Si $x \in [1, +\infty[$, $[x, x+1] \subset [1, +\infty[$
- Si $x \in [0, 1[$, $x < 1 \leq x+1$

Rappelons encore que $x \mapsto -\frac{1}{2}(1-x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 1-x$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x-1}$ sur $[1,+\infty[$

Soit $x \in]-\infty, 0[$ (ou $]-\infty,0]$!)

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_x^{x+1} (1-t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_x^{x+1} \sqrt{t-1}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_x^{x+1} = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}.$$

Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt + \int_1^{x+1} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^1 + \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_1^{x+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} & \text{si } x \in [0,1[\text{ ou } [0,1] \\ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} & \text{si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$

Q3 a) Soient f et g deux éléments de E et λ un réel.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + g)(x) = \int_x^{x+1} (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \int_x^{x+1} g(t)\,dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$; $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.

Ainsi T est une application linéaire de E dans E (d'après Q1, $\forall f \in E$, $T(f) \in E$).

b) D'après Q2 a) si l'on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \sin(2\pi x)$:

$f_0 \in E$, $f_0 \neq 0_E$ et $T(f_0) = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T \neq \{0_E\}$.

T n'est pas injective.

D'après Q1, si f est un élément de E, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\operatorname{Im} T$ est contenu dans l'espace vectoriel E_1 des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto |x|$ est continue sur IR et pas dérivable en 0. Donc $h \in E$ et $h \notin E_1$, ainsi $h \in E$ et $h \notin \operatorname{Im} T$.

<u>T n'est pas surjective.</u>

Q4 a) T n'est pas injective donc <u>0 est valeur propre de T.</u>

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = e^{ax}$. $f_a \in E$ et $f_a \neq 0_E$. <u>Supposons $a \neq 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, \ T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a} e^{at}\right]_x^{x+1} = \frac{1}{a}\left[e^{a(x+1)} - e^{ax}\right] = \frac{1}{a}(e^a - 1)e^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ T(f_a)(x) = \frac{1}{a}(e^a - 1) f_a(x)$; $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a) = \frac{e^a - 1}{a} f_a$

Ainsi $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur $\frac{e^a - 1}{a}$ si $a \in \mathbb{R}^*$

<u>Supposons $a = 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, \ T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} 1\,dt = 1 = 1 \times f_a(x)$; $T(f_0) = 1 \times f_0$ et $f_0 \neq 0_E$

Ainsi $f_0 : x \mapsto 1$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1.

Finalement <u>$f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre</u>

$$\lambda(a) = \begin{cases} \frac{e^a - 1}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}.$$

c) λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\lim\limits_{a \to 0} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1 = \lambda(0)$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, \ \lambda'(a) = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - (e^a - 1)\right] = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - e^a + 1\right]$.

$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $e^a - 1 = a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $\frac{e^a - 1}{a} = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$.

$\lambda(a) = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$; $\frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a}{2} - 1 + o(a)\right] = \frac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{2}$; λ est dérivable en 0 et $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour étudier le signe de λ' sur $\mathbb{R}^*$ posons $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) = e^a a - e^a + 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}$, $u'(a) = e^a a + e^a - e^a = a e^a$. Notons que $u(0) = 0$.

a	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(a)$		$-$	0	$+$	
$u(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) \geq 0$; mieux $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $u(a) > 0$

Donc λ' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ car $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$

Par conséquent λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\lim\limits_{a \to +\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{e^a}{a} - \frac{1}{a}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{a}(e^a - 1)\right) = 0$

λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; λ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\lambda(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Par conséquent d'après b) tout élément de $]0, +\infty[$ est une valeur propre de T

Comme 0 est également une valeur propre de T : tout réel positif est valeur propre de T.

Exercice 2 **Ecricome 1999 ex 2**

Q1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

Q2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (0 \quad 0 \quad 0)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (0 \quad 0 \quad 0)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

Q3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. *Calcul de V^n*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

Q5. *Calcul de U_n.*

a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.

Calculer MX puis M^nX.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Exercice 2

Q1 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases}x=x\\-x+4y+z-2t=y\\2x+y+2z-t=z\\x+2y+z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y+z-2t=0\\2x+y+z-t=0\\x+2y+z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0 & (L_3-L_2)\\5y+2z-3t=0 & (L_1+L_3)\\x+2y+z-t=0 & L_3\end{cases}$$

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases}y=x\\5y+2z-3t=0\\3y+z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\y+t=0 & 2L_3-L_2\\z=t-3y\end{cases}.\quad MX=X\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\t=-y=-x\\z=-x-3x=-4x\end{cases}$$

Ainsi $\{X\in M_{4,1}(\mathbb{R})\mid MX=X\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

<u>1 est valeur propre de M et $SEP(M,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.</u>

$$MX=2X\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x\\-x+4y+z-2t=2y\\2x+y+2z-t=2z\\x+2y+z=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\2y+z-2t=0\\y=t\\2y+z-2t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\t=y\\z=0\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=0\\y=t\end{cases}$$

<u>2 est valeur propre de M et $SEP(M,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.</u>

Cherchons l'ensemble des valeurs propres de M. 1 et 2 sont des valeurs propres de M. Prenons donc λ dans $\mathbb{R}-\{1,2\}$ et cherchons une réduite de Gauss de $M-\lambda I$ avec "le pivot".

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4-\lambda&1&-2\\0&1&2-\lambda&-1\\0&2&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$L_1\leftarrow\frac{1}{1-\lambda}L_1\ (\lambda\neq1)$; $L_2\leftarrow L_2+L_1$; $L_3\leftarrow L_3-2L_1$; $L_4\leftarrow L_4-L_1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&1&2-\lambda&-1\\0&4-\lambda&1&-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&-2+\lambda\\0&0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\\0&0&1&-(\lambda-2)\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&1&-(\lambda-2)\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$L_4\leftrightarrow L_2$; $L_3\leftarrow 2L_3-L_2$; $L_4\leftarrow 2L_4-(4-\lambda)L_2$; $L_4\leftarrow\frac{1}{\lambda-2}L_4$; $L_4\leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2+(3-2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & -2(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - (3-2\lambda)L_3$

Comme λ n'est pas 2 cette dernière matrice est inversible.

Ainsi si λ est distinct de 1 et 2, $M-\lambda I$ est inversible.

Par conséquent <u>1 et 2 sont les seules valeurs propres de M.</u>

Comme $\dim SEP(M,1) + \dim SEP(M,2) = 1+1 = 2 \neq 4$: <u>M n'est pas diagonalisable</u>.

<u>Remarque</u>.. M n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ni diagonalisable dans $\mathbb{C}$!

Q2 $HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ c'_2 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ c'_3 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 + \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}a'_{k3} \\ c_2 + \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}a'_{k3} \\ c_3 + \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}a'_{k3} \end{pmatrix}$

déjà précisé par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$

Or $C'' = C + AC' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \sum_{k=1}^{3} a_{1k}c'_k \\ c_2 + \sum_{k=1}^{3} a_{2k}c'_k \\ c_3 + \sum_{k=1}^{3} a_{3k}c'_k \end{pmatrix}$

et $AA' = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a'_{kj}\right)$

Dès lors $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$ et $C'' = C + AC'$

Q3 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

C'est clair pour $n=1$ (prendre $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$).

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix} \underset{Q2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}$$

Posons $U_{n+1} = U_n + V^n U_1$.

$U_{n+1} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_{n+1} & V^{n+1} \end{pmatrix}$; ceci achève la récurrence.

Remarques 1.. En posant $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a encore $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_0 & V^0 \end{pmatrix}$

2.. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique élément U_n de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

Q4 $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ W^n = 0$.

$V = W + 2I$ et W et $2I$ commutent par conséquent :

$$V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k W^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_n^k W^k$$

Supposons $n \geq 2$. $V^n = \sum_{k=0}^{2} 2^{n-k} C_n^k W^k = 2^n I + 2^{n-1} n W + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} W^2$ car $W^k = 0$ pour $k > 2$.

$V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1} \\ 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (-n+1)2^n - n(n-3)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Q5 a) $SEP(M,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$ ainsi $X = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$MX = X$ et une récurrence évidente donc $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n X = X$.

b) Posons $T = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix} = X = M^n X = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ U_n + V^n T\end{pmatrix}$$

matrice à calculer par bloc !

Donc $T = U_n + V^n T$; $U_n = T - V^n T$. Ainsi

$$a_n = 1 - [(n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3}] = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$
$$b_n = -4 - [n2^{n-1} - 4 \times 2^n + n2^{n-1}] = -4 + 2^{n+2} - n2^n$$
$$c_n = -1 - [n2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} - (-n+1)2^n + n(n-3)2^{n-3}] = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\quad \begin{cases} a_n = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2} \\ b_n = -4 + 2^{n+2} - n2^n \\ c_n = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2} \end{cases}$$