Exercice 1 **EDHEC 2005 ex 1**

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

c) Etablir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

Q2 Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.

En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3 Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Etablir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 2 **EDHEC 2006 ex 1**

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

Q1. a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\big((f - \lambda_1\, id) - (f - \lambda_2\, id)\big) = id$.

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

Q2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.

Q3 Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.

Montrer que $X \in E_i \Longleftrightarrow \overline{X} \in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}.

Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 3 **EDHEC 2007 ex 2**

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E. On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.

2) a) Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.

b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.

c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.

3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

4) On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe : $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$.

a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.

5) a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.

b) Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Le reste concerne le chapitre algèbre bilinéaire.

On rappelle que l'application, notée tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle également que l'application qui à tout couple (M, N) de $E \times E$ associe le réel noté $(M|N)$ défini par $(M|N) = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.

6) a) Montrer que, pour tout couple (P, Q) de $E \times E$, $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$.

b) Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.

c) En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi_A - Id)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi_A + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 4 **EDHEC 2009 Ex 3**

On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n + 1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n + 1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}\, P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) a) Vérifier que $f \circ f = Id$.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.

3) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un polynôme quelconque de $\operatorname{Ker}(f - Id)$.

a) Montrer que les a_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ a_k = a_{2n+1-k}$.

b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

4) Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Le reste concerne le chapitre algèbre bilinéaire.

5) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, b_k$, où l'on a noté $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.

b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique.

c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ **EDHEC 2011 ex1**

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n $(n \in N^*)$ et u un endomorphisme de E.

On note Id_E l'identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant :

$P(u) = a_0\ \mathrm{Id}_E + a_1\, u + ... + a_p\, u^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ $(u^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention).

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$.

Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X - 1)\, Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

Q1. Montrer que l'image de $(u - \mathrm{Id}_E)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q2. On note $E_1 = Ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

b) En déduire que $E_1 \cap \mathrm{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.

c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

Q4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ **EDHEC 2012 ex 1**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Q1 a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$. On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g, puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(h^{n-1}) \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(h^{n-1}) \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.
