Exercice 1 **EDHEC 1998 Ex 3**

Q1 On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de répartition de Z.

c) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

Q2 Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.

b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.

c) Déterminer l'espérance de Z.

d) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Q1 Il faut sans doute comprendre que dans cette question Z est une variable aléatoire à densité de densité f. Notons aussi que le Z de Q2 n'est pas celui de Q1.

a) • f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc $(1-1)!$ soit encore 1. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$ Comme f est paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ donc $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

b) Notons F_Z la fonction de répartition de Z.

• Soit x un élément de $]-\infty, 0]$. $F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t}\, \mathrm{d}t.$

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^x e^t\, \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\left[e^t\right]_A^x = \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\left(e^x - e^A\right) = \frac{1}{2}\, e^x.$$

Notons que $F_Z(0) = \frac{1}{2}\cdot$

• Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F_Z(0) + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$F_Z(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big[-e^{-t}\big]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big(-e^{-x}+1\big) = 1 - \frac{1}{2}\,e^{-x}.$

La fonction de répartition de Z est la fonction F_Z définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \frac{1}{2}\,e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

c) • Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité indépendantes.

• f est une densité de Z_1 et de Z_2.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|} \leqslant \frac{1}{2}$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Le cours permet alors de dire que :

$V = Z_1 + Z_2$ est une variable aléatoire à densité.

De plus $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est une densité de $V = Z_1 + Z_2$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2}\,e^{-|t|}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|-|t|}\,\mathrm{d}t.$

Pour simplifier la détermination de h montrons que cette fonction est paire sur $\mathbb{R}$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. $-x$ est encore dans $\mathbb{R}$!

$t \to -t$ définit une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

$h(-x) = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|-x-t|-|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-|-x+u|-|-u|}(-1)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|-x+u|-|u|}\,\mathrm{d}u.$

$h(-x) = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-u|-|u|}\,\mathrm{d}u = h(x)$. Ce qui achève de montrer que h est paire sur $\mathbb{R}$.

Soit x dans $[0, +\infty[$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ -|x-t|-|t| = \begin{cases} -(x-t)-(-t) & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ -(x-t)-t & \text{si } t \in [0, x] \\ -(t-x)-t & \text{si } t \in [x, +\infty[\end{cases}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-|x-t|-|t|} = \begin{cases} e^{2t-x} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ e^{-x} & \text{si } t \in [0, x] \\ e^{-2t+x} & \text{si } t \in [x, +\infty[\end{cases}$.

Alors $h(x) = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|-|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2t-x}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^x e^{-x}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_x^{+\infty} e^{-2t+x}\,\mathrm{d}t.$

$h(x) = \displaystyle\frac{1}{4}e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\,x\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^{x}\int_x^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t.$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_A^0 = \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{2A}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

Et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_{x}^{A} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_x^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(e^{-2x}-e^{-2A}\right)\right) = \frac{1}{2}\,e^{-2x}$.

Alors $h(x) = \dfrac{1}{4}\,e^{-x}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\,x\,e^{-x}+\dfrac{1}{4}\,e^{x}\times\dfrac{1}{2}\,e^{-2x} = \dfrac{1}{8}\,e^{-x}+\dfrac{1}{4}\,x\,e^{-x}+\dfrac{1}{8}\,e^{-x} = \dfrac{1}{4}\left(1+x\right)e^{-x}$.

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[,\ h(x) = \dfrac{1}{4}\left(1+x\right)e^{-x} = \dfrac{1}{4}\left(1+|x|\right)e^{-|x|}$. Soit x un élément de $]-\infty,0[$.

Comme h est paire sur $\mathbb{R}$ et que $-x$ est positif : $h(x) = h(-x) = \dfrac{1}{4}\left(1+|-x|\right)e^{-|-x|} = \dfrac{1}{4}\left(1+|x|\right)e^{-|x|}$.

La fonction h définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{4}\left(1+|x|\right)e^{-|x|}$, est une densité de $V = Z_1+Z_2$.

Q2 a) Notons F_Y (resp. F_{-Y}) la fonction de répartition de Y (resp. $-Y$).

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = P(-Y\leqslant x) = P(Y\geqslant -x) = 1-P(Y<-x) = 1-P(Y\leqslant -x)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1-\left(1-e^{-(-x)}\right) & \text{si } -x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

La fonction de répartition de $-Y$ est la fonction F_{-Y} définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x\leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$.

Remarquons que l'on a encore : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ 1 & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$.

$x\to e^{x}$ et $x\to 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors F_{-Y} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_{-Y} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$-Y$ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,0[,\ F'_{-Y}(x) = e^{x}$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F'_{-Y}(x) = 0$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

g est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F_{-Y} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi g est une densité de $-Y$.

La fonction g définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est une densité de $-Y$.

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. φ est une densité de X car X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

• X et $-Y$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes (car X et Y sont indépendantes).

• φ est une densité de X et g est une densité de $-Y$.

• $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ donc φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Le cours permet alors de dire que $X + (-Y)$ est une variable aléatoire à densité.

$$\boxed{X - Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

De plus $\psi : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est une densité de $X - Y$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x-t)\, e^t\, \mathrm{d}t$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ \psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-t)}\, e^t\, \mathrm{d}t = e^{-x} \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\, \mathrm{d}t$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ \psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-t)}\, e^t\, \mathrm{d}t = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{2t}\, \mathrm{d}t$. Remarquons alors que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{Min}(0,x)} e^{2t}\, \mathrm{d}t$. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{\mathrm{Min}(0,x)} e^{2t}\, \mathrm{d}t = \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_A^{\mathrm{Min}(0,x)} = \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\left(e^{2\,\mathrm{Min}(0,x)} - e^{2A}\right)\right) = \frac{1}{2}\, e^{2\,\mathrm{Min}(0,x)}$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{Min}(0,x)} e^{2t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, e^{2\,\mathrm{Min}(0,x)}$. Alors $\psi(x) = e^{-x} \times \dfrac{1}{2}\, e^{2\,\mathrm{Min}(0,x)} = \dfrac{1}{2}\, e^{2\,\mathrm{Min}(0,x) - x}$.

Si x est positif $2\,\mathrm{Min}(0,x) - x = 2 \times 0 - x = -x = -|x|$ et si x est négatif $2\,\mathrm{Min}(0,x) - x = 2x - x = x = -|x|$.

Alors $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$ et ceci pour tout réel x. Notons que $\psi = f$.

$$\boxed{f \text{ est une densité de } Z \text{ donc } Z \text{ suit la loi exponentielle bilatéral.}}$$

c) X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre 1 donc X et Y possèdent une espérance dont la valeur est 1. Alors Z possède une espérance et $E(Z) = E(X) - E(Y) = 1 - 1 = 0$ (par linéarité de l'espérance).

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance qui vaut } 0.}$$

d) Notons F_T la fonction de répartition de T.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(|Z| \leqslant x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(|Z| \leqslant x) = P(-x \leqslant Z \leqslant x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \psi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}\, e^{-|t|}\, \mathrm{d}t$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F_T(x) = 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\, e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-e^{-t}\big]_0^x = 1 - e^{-x}$.

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } T \text{ est la fonction } F_T \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

Pas de doute :

$$\boxed{T \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

Exercice 2 **EDHEC 2000 Ex 1**

Q1 La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

b) Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t,h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}h$.

On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$.

La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.

Q2 Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.

a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

Q3 La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

---

1) Dans cette question nous supposerons f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a. Notons d'abord que F est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$) et, pour tout élément t de $\mathbb{R}^{+*}$, $F'(t) = f(t) > 0$. Ceci suffit pour dire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (non ?).

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$ donc : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F(t) < 1$.

Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 < 1 - F(t)$. Ceci donne encore : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ p(X > t) = 1 - F(t) \neq 0$.

Soient t et h deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

$$p(t,h) = p(X < t+h / X > t) = \frac{p\big(\{X < t+h\} \cap \{X > t\}\big)}{p(X > t)} = \frac{p(t < X < t+h)}{p(X > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall h \in \mathbb{R}^{+*},\ p(t,h) = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}}.$$

b. Soit t un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Alors $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = f(t)$. Comme $f(t)$ n'est pas nul(le), $\displaystyle\frac{F(t+h)-F(t)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} f(t)$.

En particulier : $\displaystyle\frac{F(t+h)-F(t)}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} f(t)$.

Ainsi : $\displaystyle p(t,h) = \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)} = \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \times \frac{1}{1-F(t)} \times h \underset{h\to 0^+}{\sim} f(t) \times \frac{1}{1-F(t)} \times h = \frac{f(t)}{1-F(t)}\ h.$

$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ strictement positif} : p(t,h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{f(t)}{1-F(t)}\ h}$.

2) Ici nous supposerons (encore) que X possède une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $]-\infty, 0]$.

Comme dans la question précédente nous avons encore : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 1 - F(t) > 0$.

a. Notons alors que λ_X est définie sur $[0, +\infty[$ et continue au moins sur $]0, +\infty[$.

Soit t et ε deux réels strictement positifs.

$$\int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^t \frac{f(u)}{1-F(u)}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^t \frac{F'(u)}{1-F(u)}\,\mathrm{d}u = \Big[-\ln|1-F(u)|\Big]_\varepsilon^t = -\ln|1-F(t)| + \ln|1-F(\varepsilon)|.$$

$$\int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln(1-F(t)) + \ln(1-F(\varepsilon)).$$

F est continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = F(0) = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\big(1-F(\varepsilon)\big) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln\big(1-F(t)\big)$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } t \text{ de } \mathbb{R}^{+*},\ \displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u \text{ existe et vaut } -\ln\big(1-F(t)\big)}$

Nous savons déjà que F_X est nulle sur $]-\infty, 0]$ puisque f est nulle sur ce même ensemble.

Soit t un réel strictement positif. $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln\big(1-F(t)\big)$ donc $1 - F(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0],\ F(t) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

$\boxed{\text{La seule connaissance de la fonction de taux de panne } \lambda_X \text{ permet de déterminer la fonction de répartition } F \text{ de } X.}$

b. • Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre α.

Posons : $\forall t \in]-\infty, 0],\ f_Y(t) = 0$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ f_Y(t) = \alpha e^{-\alpha t}$. f_Y est une densité de Y.

Notons que f_Y est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ F_Y(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)} = \dfrac{\alpha e^{-\alpha t}}{1-(1-e^{-\alpha t})} = \alpha$.

Le taux de panne λ_Y de Y est donc constant sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Réciproquement, reprenons la variable aléatoire X du début et supposons que son taux de panne λ_X est constant sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il existe donc un réel c tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda_X(t) = c$.

Rappelons que F est nulle sur $]-\infty, 0]$ et que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, F(t) = 1 - e^{-\int_0^t c\,\mathrm{d}u} = 1 - e^{-ct}$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$, nécessairement $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-ct} = 0$ et donc c est strictement positif.

c est strictement positif, $\forall t \in]-\infty, 0],\ F(t) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ F(t) = 1 - e^{-ct}$. Donc X suit une loi exponentielle de paramètre c. Concluons.

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$: son taux de panne λ_X est constant sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si X suit une loi exponentielle.

3) $\forall t \in]-\infty, 0],\ F(t) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ F(t) = 1 - e^{-\int_0^t u^3\,\mathrm{d}u} = 1 - e^{-t^4/4}$.

a. $p(X > 1) = 1 - p(X \leqslant 1) = 1 - F(1) = e^{-1/4}$.

La probabilité pour que cet appareil survive plus d'un an est $e^{-1/4}$.

b. $p(X > 2/X > 1) = \dfrac{p\big(\{X > 2\} \cap \{X > 1\}\big)}{p(X > 1)} = \dfrac{p(X > 2)}{p(X > 1)} = \dfrac{1 - p(X \leqslant 2)}{1 - p(X \leqslant 1)} = \dfrac{e^{-2^4/4}}{e^{-1/4}} = e^{-15/4}$.

La probabilité pour que cet appareil agé de un an, survive plus de deux ans est $e^{-15/4}$.

Exercice 3 **EDHEC 2002 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\forall (x.y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)f_2(y) = g(x^2 + y^2).$$

Q1 On suppose, dans cette question seulement, que X_1, et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x}{2}}$.

Q2 a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)} = \dfrac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

b) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)}$.

Soient x_1, et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1) = h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c) Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x) = f_1(x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Montrer que k est constante sur $]0, +\infty[$ ainsi que sur $]-\infty, 0[$. En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis **montrer qu'il existe un réel K tel que** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\dfrac{ax^2}{2}}.$$

d) Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif.

On pose dorénavant $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e) En déduire que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$.

Q3 On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_2)$.

Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1 = \sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

---

1) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de X_1 (resp. X_2) strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mieux c'est l'unique densité strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ de X_1 (resp. X_2).

Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x^2+y^2) = f_1(x)\, f_2(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. Posons $t = \sqrt{\dfrac{x}{2}}\cdot$ $x = t^2+t^2$ donc $g(x) = g(t^2+t^2) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{t^2+t^2}{2}} = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x}{2}}.}$$

2) a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f_1(x)\, f_2(y) = g(x^2+y^2)$.

En dérivant par rapport à x on obtient : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f_1'(x)\, f_2(y) = 2x\, g'(x^2+y^2)$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{2x\, g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)} = \dfrac{f_1'(x)\, f_2(y)}{f_1(x)\, f_2(y)} = \dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \frac{f_1'(x)}{x\, f_1(x)} = \frac{2\, g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}\cdot}$$

b. Soient x_1 et x_2 deux réels (distincts) non nuls.

$h(x_1) = \dfrac{f_1'(x_1)}{x_1\, f_1(x_1)} = \dfrac{2\, g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)} = \dfrac{2\, g'(x_2^2+x_1^2)}{g(x_2^2+x_1^2)} = \dfrac{f_1'(x_2)}{x_2\, f_1(x_2)} = h(x_2)$.

$$\boxed{\forall (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ h(x_1) = h(x_2).\ h \text{ est constante sur } \mathbb{R}^*.}$$

c. f_1 et $x \to e^{-\frac{ax^2}{2}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = f_1'(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} - ax\, f_1(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} = (f_1'(x) - ax\, f_1(x))\, e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{x\, f_1(x)} = a$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) = ax\, f_1(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) - ax\, f_1(x) = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ k'(x) = 0$.

Ainsi k' est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. k est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{k \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

Il existe alors deux réels K et K' tels que : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ k(x) = K$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ k(x) = K'$.

Par définition, k est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Alors $K = \lim\limits_{x \to 0^-} k(x) = k(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = K'$.

Donc $K = k(0) = K'$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = K$.

$$\boxed{k \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x)\, e^{-\frac{ax^2}{2}} = k(x) = K$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\frac{ax^2}{2}}$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } K \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\frac{ax^2}{2}}.}$$

d. f_1 est une densité de probabilité strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc K est strictement positif.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En particulier $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Supposons que a est positif ou nul. $\forall t \in [1, +\infty[,\ e^{\frac{at^2}{2}} \geqslant 1 = \dfrac{1}{t^0} \geqslant 0$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ donne alors la convergence $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^0}\,\mathrm{d}t$ ce que réprouve la morale Riemannienne.

$$\boxed{a \text{ est strictement négatif.}}$$

e. $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$. De plus f_1 est une densité de probabilité.

Alors : $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}t = K\sqrt{2\pi}\,\sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}t.$

Or $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres 0 et σ_1.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}t = 1$. Il vient alors : $1 = K\sqrt{2\pi}\,\sigma_1 \times 1 = K\sqrt{2\pi}\,\sigma_1$.

Par conséquent $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$.

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi normale de paramètres 0 et } \sigma_1.}$$

3) De même on peut trouver un réel σ_2 strictement positif tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$ et ainsi X_2 suit une loi normale de paramètres 0 et σ_2.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)\, f_2(y) = g(x^2 + y^2)$. Ainsi $f_1(1)\, f_2(0) = g(1) = f_1(0)\, f_2(1)$.

Alors $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$.

Ce qui donne $e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$, puis $\dfrac{1}{2\sigma_1^2} = \dfrac{1}{2\sigma_2^2}$.

Enfin $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et : $\sigma_1 = \sigma_2$ car ces deux réels sont strictement positifs.

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent toutes les deux la même loi normale.}}$$

Exercice 4 **EDHEC 2004 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z = X + Y$.

Q1 a) Déterminer une densité de Z.

b) Montrer que, pour tout x de $]0,1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leqslant 1 + x)$ sont indépendants.

Q2 a) On pose $T = \text{Max}(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que T est une variable à densité puis donner une densité de T.

b) En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c) On pose $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

---

1) a. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de X et de Y.

X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densité f.

Alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit x un réel. Par définition de f, $h(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = x - t$ donne alors $h(x) = -\displaystyle\int_x^{x-1} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x-1}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$.

- Si x est élément de $]-\infty, 0[$, $[x-1, x]$ est contenu dans $]-\infty, 0[$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} 0\,\mathrm{d}u = 0$.
- Si x est élément de $]2, +\infty[$, $[x-1, x]$ est contenu dans $]1, +\infty[$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} 0\,\mathrm{d}u = 0$.
- Si x est élément de $[0,1[$ alors $x - 1 < 0 \leqslant x < 1$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}u = x$.
- Si x est élément de $[1,2]$ alors $0 \leqslant x - 1 \leqslant 1 \leqslant x$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{1} 1\,\mathrm{d}u = 1 - (x-1) = 2 - x$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Z = X + Y.}$$

b. Soit x un élément de $]0,1[$. Notons que $0 < 1-x < 1 < 1+x < 2$.

• $P(Z>1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (2-t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot$

• $P(1-x < Z \leqslant 1+x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^{1} t\,\mathrm{d}t + \int_1^{1+x} (2-t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{1-x}^{1} + \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^{1+x}.$

$P(1-x < Z \leqslant 1+x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(1-x)^2}{2} - \dfrac{(1-x)^2}{2} + \dfrac{1}{2} = 1-(1-x)^2\cdot$

• $P\big(\{Z>1\}\cap\{1-x < Z \leqslant 1+x\}\big) = P(1 < Z \leqslant 1+x) = \displaystyle\int_1^{1+x} (2-t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}\cdot$

Alors $P\big(\{Z>1\}\cap\{1-x<Z\leqslant 1+x\}\big) = \dfrac{1}{2}\big(1-(1-x)^2\big) = P(Z>1)\,P(1-x<Z\leqslant 1+x)$.

$$\boxed{\text{Les événements } \{Z>1\} \text{ et } \{1-x < X \leqslant 1+x\} \text{ sont indépendants.}}$$

2) a. Cherchons la fonction de répartition F_T de $T = \mathrm{Max}(X,Y)$.

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}.$

Soit x un réel. $F_T(x) = P(T \leqslant x) = P\big(\mathrm{Max}(X,Y) \leqslant x\big) = P\big(\{X \leqslant x\}\cap\{Y\leqslant x\}\big)$.

Les variables X et Y étant indépendantes il vient : $F_T(x) = P(X\leqslant x)\,P(Y\leqslant x) = F_X(x)\,F_Y(x) = \big(F_X(x)\big)^2$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}.$

Comme $F_T(0) = 0$ on a $\forall x \in]-\infty,0],\ F_T(x) = 0$ et ainsi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

Comme $F_T(1) = 1$ on a $\forall x \in [1,+\infty[,\ F_T(x) = 1$ et ainsi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

De plus $\forall x \in [0,1],\ F_T(x) = x^2$ donc F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Ce qui précède permet alors de dire que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Par conséquent :

$$\boxed{T \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ F_T'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ F_T'(x) = 2\,x$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

f_T est une application positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F_T' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc f_T est une densité de probabilité de T.

$$\boxed{\text{La fonction } f_T \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de probabilité de } T.}$$

b. Comme f_T est nulle sur $]-\infty,0[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0. Il en est de même pour $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$.

$t \to t\,f_T$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors T possède une espérance qui est égale à $\displaystyle\int_0^1 t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t$. De plus $\displaystyle\int_0^1 t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\,t^2\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{T \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{2}{3}.}$$

c. Soient a et b deux réels.

Supposons $a \leqslant b$. $\mathrm{Max}(a,b) = b$ et $|a-b| = b-a$.

Donc $2\,\mathrm{Max}(a,b) = 2\,b = a+b+(b-a) = a+b+|a-b|$. $|a-b| = 2\,\mathrm{Max}(a,b)-(a+b)$.

On montre de la même manière cette dernière égalité lorsque $a > b$.

Ainsi $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ |a-b| = 2\,\mathrm{Max}(a,b)-(a+b)$.

Remarque *On observera et on retiendra que* $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{Max}(a,b) = \dfrac{1}{2}\Big(a+b+|a-b|\Big)$.

De même : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{Min}(a,b) = \dfrac{1}{2}\Big(a+b-|a-b|\Big)$.

En appliquant ce qui précède on obtient :

$\forall \omega\in\Omega,\ U(\omega) = |X(\omega)-Y(\omega)| = 2\,\mathrm{Max}\big(X(\omega),Y(\omega)\big)-(X(\omega)+Y(\omega)) = \Big(2\,\mathrm{Max}(X,Y)-(X+Y)\Big)(\omega)$.

Alors $\forall \omega\in\Omega,\ U(\omega) = \big(2\,T-Z\big)(\omega)$ et ainsi :

$$\boxed{U = 2\,T - Z.}$$

$Z = X+Y$. X et Y possèdent une espérance qui vaut $\dfrac{1}{2}$. Alors Z possède une espérance qui vaut 1.

Rappelons que $E(T)$ existe et vaut $\dfrac{2}{3}$. Alors $U = 2\,T-Z$ possède une espérance égale à $2\,\dfrac{2}{3}-1$ c'est à dire $\dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{L'espérance de } U \text{ existe et vaut } \frac{1}{3}.}$$

Exercice 5 **EDHEC 2005 Ex 2**

Pour tout réel x, on note $\text{Ent}\,(x)$ la partie entière de x et on rappelle que $\text{Ent}\,(x)$ est le seul entier vérifiant : $\text{Ent}\,(x) \leqslant x < \text{Ent}\,(x) + 1$.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \text{Ent}\,(X)$, $X_2 = \text{Ent}\,(10(X - X_1))$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $((\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1 a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.

c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.

Q2 a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.

b) Justifier que, pour tout k élément de $[\![0, 9]\!]$, $P(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P\big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\big)$, puis montrer que :

$$\forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\Big(i + \frac{k+1}{10}\Big) - F\Big(i + \frac{k}{10}\Big) \right).$$

En déduire que : $\quad \forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$.

Q3 Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

---

1) a)) $X(\Omega) = [0, +\infty[$ donc $X_1(\Omega) = \lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{X_1(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $P(X_1 = k) = P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leqslant X < k + 1)$.

Or X est une variable aléatoire à densité donc $P(k \leqslant X < k + 1) = P(k < X \leqslant k + 1)$.

Ainsi $P(X_1 = k) = P(k < X \leqslant k + 1) = F(k + 1) - F(k)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = F(k + 1) - F(k).}$$

c) X admet pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi :

$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = F(k+1) - F(k) = \displaystyle\int_k^{k+1} \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda\, t}\right]_k^{k+1} = e^{-\lambda\, k} - e^{-\lambda\,(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\, k}.$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\, k}.}$$

Posons $Y_1 = X_1 + 1$.

$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_1 = k) = P(X_1 = k - 1) = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\,(k-1)} = (1 - e^{-\lambda})\, \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}.$

Posons $p = 1 - e^{-\lambda}$. $p \in]0, 1[$ car λ est strictement positif. De plus $1 - p = e^{-\lambda}$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_1 = k) = p\,(1 - p)^{k-1}$.

Ceci achève alors de montrer que Y_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$. Ainsi :

$$\boxed{X_1 + 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\lambda}.}$$

d) $Y_1 = X_1 + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$ donc possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$.

Alors $X_1 = Y_1 - 1$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1$ ou $\dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ ou encore $\dfrac{1}{e^{\lambda} - 1}$.

$$\boxed{X_1 \text{ possède une espérance qui vaut : } \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \text{ ou } \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.}$$

2) a) $X - X_1 = X - \lfloor X \rfloor$ et $X(\Omega) = [0, +\infty[$ donc $(X - X_1)(\Omega) = [0, 1[$. Alors $\Big(10(\,X - X_1)\Big)(\Omega) = [0, 10[$.

Ainsi $\lfloor 10(\,X - X_1) \rfloor(\Omega) = \{0, 1 \ldots, 9\}$. Finalement :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{0, 1 \ldots, 9\}.}$$

Soit ω un élément de Ω. $X(\omega)$ est un réel positif. $(X - X_1)(\omega)$ est, pour simplifier, sa partie décimale.

$10\,(X - X_1)(\omega)$ est dix fois la partie décimale de $X(\omega)$. Alors la partie entière de $10\,(X - X_1)(\omega)$ est la première décimale de $X(\omega)$.

Donc $X_2(\omega)$ est la première décimale de $X(\omega)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } \omega \text{ de } \Omega,\ X_2(\omega) \text{ représente, pour simplifier, la première décimale de } X(\omega).}$$

b) Soit k un élément de $\{0, 1 \ldots, 9\}$.

$\Big(\{X_1 = i\}\Big)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc $\{X_2 = k\} = \displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\Big)$.

Cette réunion étant constituée d'événements deux à deux disjoints on a :

$$P(X_2=k)=P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\Big(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\Big)\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right).$$

$$\boxed{\forall k\in\{0,1\ldots,9\},\ P(X_2=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right).}$$

Soit k un élément de $\{0,1\ldots,9\}$ et i un élément de $\mathbb{N}$. Soit ω un élément de Ω.

$X_1(\omega)=i$ et $X_2(\omega)=k \iff i\leqslant X(\omega)<i+1$ et $k\leqslant 10\,(X(\omega)-i)<k+1$.

$X_1(\omega)=i$ et $X_2(\omega)=k \iff i\leqslant X(\omega)<i+1$ et $i+\dfrac{k}{10}\leqslant X(\omega)<i+\dfrac{k+1}{10}\cdot$

Or $i\leqslant i+\dfrac{k}{10}$ et $i+\dfrac{k+1}{10}\leqslant i+1$ donc : $X_1(\omega)=i$ et $X_2(\omega)=k \iff i+\dfrac{k}{10}\leqslant X(\omega)<i+\dfrac{k+1}{10}\cdot$

Finalement $\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}=\left\{i+\dfrac{k}{10}\leqslant X<i+\dfrac{k+1}{10}\right\}$.

Rappelons que X est une variable aléatoire à densité. Ainsi :

$P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=P\left(i+\dfrac{k}{10}\leqslant X<i+\dfrac{k+1}{10}\right)=P\left(i+\dfrac{k}{10}<X\leqslant i+\dfrac{k+1}{10}\right)$.

Donc $P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)$.

Alors $P(X_2=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)\right)$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P(X_2=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(F\left(i+\frac{k+1}{10}\right)-F\left(\frac{i+k}{10}\right)\right).}$$

Soit k un élément de $\{0,1\ldots,9\}$.

$\forall i\in\mathbb{N},\ F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)=\displaystyle\int_{i+\frac{k}{10}}^{i+\frac{k+1}{10}}\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,\mathrm{d}t=\Big[-e^{-\lambda\,t}\Big]_{i+\frac{k}{10}}^{i+\frac{k+1}{10}}=e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)}-e^{-\lambda\left(i+\frac{k+1}{10}\right)}$.

$\forall i\in\mathbb{N},\ F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,(1-e^{-\frac{\lambda}{10}})\,e^{-\lambda\,i}$.

Alors $P(X_2=k)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,(1-e^{-\frac{\lambda}{10}})\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^i$.

Comme $|e^{-\lambda}|<1$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^i=\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}\cdot$ Ainsi : $P(X_2=k)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,\dfrac{1-e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1-e^{-\lambda}}\cdot$

$$\boxed{\forall k\in\{0,1,\ldots,9\},\ P(X_2=k)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,\frac{1-e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1-e^{-\lambda}}\cdot}$$

3) Soit i un élément de $\mathbb{N}$ et soit k un élément de $\{0,1,\ldots,9\}$.

Nous avons vu que : $P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)$.

Nous avons également vu que : $F\left(i+\dfrac{k+1}{10}\right)-F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,(1-e^{-\frac{\lambda}{10}})\,e^{-\lambda\,i}$.

Alors $P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,(1-e^{-\frac{\lambda}{10}})\,e^{-\lambda\,i}=(1-e^{-\lambda})\,e^{-\lambda\,i}\,e^{-\frac{\lambda\,k}{10}}\,\dfrac{1-e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1-e^{-\lambda}}$.

Donc $P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=P(X_1=i)\,P(X_2=k)$.

Finalement X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discètes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telles que $\forall i\in X_1(\Omega),\ \forall k\in X_2(\Omega),\ P\left(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k\}\right)=P(X_1=i)\,P(X_2=k)$. Ainsi :

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.}}$$

Exercice 6 **EDHEC 2006 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indé pendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

JF : nous supposerons que φ est l'unique densité de X continue sur $\mathbb{R}$...

On pose $Z = \text{Sup}(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

Q1 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 2\,\varphi(x)\,\Phi(x)$

Q2 a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\text{dt}$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\text{dt}$.

c) En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f(x)\text{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\text{dt}$

d) Montrer de même que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\text{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\text{d t}$.
En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

Q3 a) a. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Remarque Le texte utilise la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}$. φ n'est donc pas une densité quelconque de X et de Y. Rappelons (?) que $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ est l'unique densité de X définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi dans tout l'exercice nous supposerons que φ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) a) Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons que Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Il reste alors à montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Soit x un réel. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid \text{Sup}\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \leqslant x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x \text{ et } Y(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leqslant x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$.

X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ donc $X^{-1}(]-\infty, x])$ et $Y^{-1}(]-\infty, x])$ sont deux éléments de la tribu $\mathcal{T}$ qui est stable par intersection finie ou dénombrable.

Par conséquent $X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$ est encore un élément de $\mathcal{T}$.

Finalement $Z^{-1}(]-\infty, x])$ est un élément de $\mathcal{T}$ et ceci pour tout réel x. Alors :

$$\boxed{Z = \mathrm{Sup}(X, Y) \text{ est une variable aléatoire réelle sur } (\Omega, \mathcal{T}, P).}$$

Montrons que Z est une variable aléatoire à densité. Notons F sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(Z \leqslant x) = P(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant x\}) = P(X \leqslant x)\, P(Y \leqslant x) = \Phi(x)\, \Phi(x) = \big(\Phi(x)\big)^2$ car X et Y sont indépendantes.

φ est une (la !) densité continue sur $\mathbb{R}$ de X donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$.

Ainsi $F = \Phi^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui suffit très largement pour dire que Z est une variable aléatoire à densité.

$$\boxed{Z = \mathrm{Sup}(X, Y) \text{ est une variable aléatoire à densité sur } (\Omega, \mathcal{T}, P).}$$

b) De plus F' est une densité de Z. Notons que : $F' = \big(\Phi^2\big)' = 2\, \Phi'\, \Phi = 2\, \varphi\, \Phi$.

$$\boxed{f : x \to 2\, \varphi(x)\, \Phi(x) \text{ est une densité de } Z = \mathrm{Sup}(X, Y).}$$

2) a) $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \sqrt{2\pi}.}$$

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2}}\cdot$

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \psi(t) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Ainsi ψ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons aussi que $u \to e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées indique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$ est de même nature que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t$ et qu'en cas de convergence ces deux intégrales sont égales.

Observons que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\, \psi'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ et rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut : $\sqrt{2\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$. Par conséquent :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \sqrt{\pi}.}$$

c) et **d)** $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\,\varphi(x)$.

Remarquons que φ' est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ x\,f(x) = 2\,x\,\varphi(x)\,\Phi(x) = -2\,\varphi'(x)\,\Phi(x)$.

Soit A dans $\mathbb{R}$. φ et Φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties simple donne alors :

$\displaystyle\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-2\,\varphi(x)\,\Phi(x)\Big]_0^A - \int_0^A (-2\,\varphi(x)\,\Phi'(x))\,\mathrm{d}x = -2\,\varphi(A)\,\Phi(A) + 2\,\varphi(0)\,\Phi(0) + 2\int_0^A (\varphi(x))^2\,\mathrm{d}x.$

$\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(x))^2 = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-x^2}$.

Alors $\displaystyle\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = -2\,\varphi(A)\,\Phi(A) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^A e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et ceci pour tout réel A (1).

En multipliant par -1 on obtient : $\displaystyle\int_A^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\varphi(A)\,\Phi(A) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_A^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et ceci pour tout réel A (2).

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^A e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_A^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Notons que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\varphi(A) = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\varphi(A) = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\Phi(A) = 1$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Phi(A) = 0$, car $\forall A \in \mathbb{R},\ \varphi(A) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{A^2}{2}}$ et Φ est une fonction de répartition.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\Big(-2\,\varphi(A)\,\Phi(A)\Big) = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Big(2\,\varphi(A)\,\Phi(A)\Big) = 0$.

Alors (1) donne $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.}$$

(2) donne $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Ainsi Z possède une espérance.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$E(Z) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot}$$

3) a) X et Z sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ il en est donc de même pour X^2 et Z^2.

Notons F_{X^2} (resp. F_{Z^2}) la fonction de répartition de X^2 (resp. Z^2).

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{X^2}(x) = F_{Z^2}(x) = 0$ car X^2 et Z^2 prennent leurs valeurs dans $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$ car X est une variable alétoire à densité.

De même : $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = F_Z(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Rappelons que $F_Z = \Phi^2$ et que $\forall u \in \mathbb{R},\ \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - \big(\Phi(-\sqrt{x})\big)^2 = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - \big(1 - \Phi(\sqrt{x})\big)^2$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - 1 + 2\,\Phi(\sqrt{x}) - \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 = \Phi(\sqrt{x}) - \big(1 - \Phi(\sqrt{x})\big) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$. Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$.

X^2 et Z^2 ont la même fonction de répartition donc :

$$\boxed{X^2 \text{ et } Z^2 \text{ suivent la même loi.}}$$

b) X suit la loi normale centrée réduite. Alors $E(X)$ existe et vaut 0 et $V(X)$ existe et vaut 1.

Ainsi $E(X^2)$ existe et vaut $V(X) + \big(E(X)\big)^2$, c'est à dire 1.

Comme Z^2 a même loi que X^2, Z^2 possède une espérance qui vaut 1 donc Z possède une variance.

$V(Z) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{\pi}\cdot$

$$\boxed{\text{L'espérance de } Z^2 \text{ existe et vaut 1. La variance de } Z \text{ existe et vaut } 1 - \frac{1}{\pi}\cdot}$$

Exercice 7 **EDHEC 2007 Ex 3**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

Q2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}\cdot$

Q3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t} dt$.

Q4. a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\,n^{n+1}}\cdot$

b) On admet que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz$.

---

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1 (ou la loi gamma de paramètres 1 et 1... ou la loi gamma de paramètre 1). Le cours permet alors de dire que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ suit la loi gamma de paramètres 1 et } n,\ E(S_n) = n \text{ et } V(S_n) = n.}$$

2) $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la même loi ayant une espérance égale à 1 et une variance (non nulle) égale à 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que la suite de terme général $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Alors, pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) = \Phi(x)$.

En particulier $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\cdot$ Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} P\left(S_n \leqslant E(S_n)\right) = \frac{1}{2}\cdot$

Or $E(S_n) = n$. Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}\cdot}$$

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n.

Posons alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{S_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}\, t^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_{S_n} est une densité de S_n.

Alors $P(S_n \leqslant n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{n} f_{S_n}(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{e^{-t}\, t^{n-1}}{\Gamma(n)}\, \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{e^{-t}\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}t$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot}$$

4) a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \neq 0$ donc $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\cdot$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to \dfrac{t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cela autorise le changement de variable $z = \dfrac{t}{n}$ dans $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On obtient alors :

$\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}\, e^{-n\,z}}{(n-1)!}\, n\, \mathrm{d}z = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z.$

Alors $\displaystyle\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 z^{n-1}\, e^{-nz}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\,z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}\cdot$

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\,z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}\cdot}$$

b) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\, n}\, n^n\, e^{-n}$ donc $\dfrac{n!}{2\, n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi\, n}\, n^n\, e^{-n}}{2\, n^{n+1}}$ ou $\dfrac{n!}{2\, n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\, e^n}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}\, e^{-n\,z}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\, e^n}\cdot}$$

Exercice 8 **EDHEC 2008 Ex 1**

Q1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2\,x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Dans la suite X et Y sont deux variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

d) Déterminer la probabilité pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2\,X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

---

1) Soit λ un réel. λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible.

Or $A - \lambda\, I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si $(-\lambda)\,(2x - \lambda) - y\,(-1) = 0$,

donc si et seulement si $\lambda^2 - 2x\,\lambda + y = 0 \quad (1)$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $(2x)^2 - 4y$; il a donc le signe de $x^2 - y$.

• Premier cas : $x^2 - y < 0$. L'équation (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$. A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Deuxième cas : $x^2 - y = 0$. L'équation (1) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ qui est x. Ainsi x est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{R}$.

Supposons alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

D est semblable à A donc a les mêmes valeurs propres que A. Ainsi D est diagonale et a pour unique valeur propre x. Dans ces conditions : $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ donc $D = x\, I_2$.

Alors : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix} = A = PDP^{-1} = P(x\, I_2)P^{-1} = x\, PI_2P^{-1} = x\, PP^{-1} = x\, I_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Cela n'est pas très vraisemblable dans la mesure où -1 n'est pas franchement égal à 0 !

Par conséquent A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Troisième cas $x^2 - y > 0$. L'équation (1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. Ainsi A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant deux valeurs propres réelles et distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } x^2 - y \text{ est strictement positif.}}$$

2) Dans la suite si T est une variable aléatoire nous noterons F_T sa fonction de répartition.

a) X^2 prend ses valeur dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{X^2}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ F_{X^2}(x) = 1$.

$\forall x \in [0,1[,\ F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R},\quad F_X(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $\forall x \in [0,1[,\ F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Vérifions rapidement que X^2 est une variable aléatoire à densité même si cela n'est pas demandé. Notons déjà que X^2 est une variable aléatoire car X en est une.

Rappelons que $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $[1, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

F_{X^2} est aussi continue sur $]-\infty, 0[$, $[0,1[$ et $[1, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que F_{X^2} est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0,1\}$ et continue à droite en 0 et 1 (normal...).

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{X^2}(x) = 0 = \sqrt{0} = F_{X^2}(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F_{X^2}(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1 = F_{X^2}(1)$. F_{X^2} est donc continue à gauche en 0 et 1.

Finalement F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$. Ainsi X^2 est une variable aléatoire à densité.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[,\ F'_{X^2}(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ F'_{X^2}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Posons alors : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_{X^2} est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_{X^2} sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points donc c'est une densité de X^2.

La fonction f_{X^2} définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, est une densité de X^2.

b) $-Y$ prend ses valeur dans $[-1, 0]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, -1[,\ F_{-Y}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{-Y}(x) = 1$.

$\forall x \in [0,1[,\ F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = 1 - F_Y(-x)$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}\ F_Y(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $\forall x \in [-1, 0[,\ F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = 1 - (-x) = 1 + x = \dfrac{x - (-1)}{0 - (-1)}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. Donc $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$. Dans ces conditions :

> la fonction f_{-Y} définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de $-Y$.

c) • X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes car X et Y le sont.

• X^2 et $-Y$ sont des variables aléatoires à densité admettant pour densité respectivement f_{X^2} et f_{-Y}.

• f_{-Y} est bornée sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions $X^2 + (-Y)$ est une variable aléatoire à densité et la fonction $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(x-t)\, f_{-Y}(t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $X^2 - Y$ est une variable aléatoire à densité et h en est une densité. Déterminons h. Soit x un réel.

$h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(x-t)\, f_{-Y}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f_{X^2}(x-t)\, \mathrm{d}t$ car $\forall t \in \mathbb{R},\quad f_{-Y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le changement de variable($\mathcal{C}^1$!) $u = x - t$ donne sans difficulté : $h(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+1} f_{X^2}(u)\, \mathrm{d}u$.

Rappelons alors que $\forall u \in \mathbb{R},\quad f_{X^2}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Observons que si x appartient à $]-\infty, -1[$: $[x, x+1] \subset]-\infty, 0[$ et si x appartient à $]1, +\infty[$: $[x, x+1] \subset]1, +\infty[$.

Alors si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, f_{X^2} est nulle sur l'intervalle $[x, x+1]$, donc $h(x) = 0$.

Supposons que x appartienne à $[-1, 0]$. Alors $x + 1 \in [0, 1]$.

Ainsi $h(x) = \displaystyle\int_{0}^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \Big[\sqrt{u}\Big]_0^{x+1} = \sqrt{x+1}$.

Supposons que x appartienne à $]0, 1]$ alors $x + 1 \in]1, 2]$.

Ainsi $h(x) = \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \Big[\sqrt{u}\Big]_x^{1} = 1 - \sqrt{x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

> $X^2 - Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :
>
> $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarque *On a encore :* $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \textit{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - \sqrt{x} & \textit{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$!

d) Notons S l'événement la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$S = \left\{ \omega \in \Omega \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y(\omega) & 2\,X(\omega) \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}.$

D'après la question 1 : $S = \left\{ \omega \in \Omega \mid \big(X(\omega)\big)^2 - Y(\omega) > 0 \right\} = \{X^2 - Y > 0\}.$

Ainsi $P(S) = P(X^2 - Y > 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(1 - \sqrt{t}\big)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot$

$$\boxed{\text{La probabilité pour que la matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est } \frac{1}{3}\cdot}$$

Exercice 9 **EDHEC 2010 Ex 3**

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables alétoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.

b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Compléter la déclaration de la fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
Var x, y : real ;
Begin
x : = .......... ; y : = .......... ; z : = .......... ;
End ;
```

---

1) a) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Y est une densité de Y et de X.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x \in]a, +\infty[\end{cases}$.

Notons F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$. $-Y$ prend ses valeurs dans $]-a, 0]$.

Donc $\forall x \in]-\infty, -a],\ F_{-Y}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{-Y}(x) = 1$.

Soit x un élément de $]-a, 0[$.

$F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x)$ car Y est une variable aléatoire à densité.

$F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = 1 - \left(\dfrac{-x}{a}\right)$ car $-x$ appartient à $]0, a[$. Finalement : $F_{-Y}(x) = \dfrac{x-(-a)}{0-(-a)}\cdot$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -a] \\ \dfrac{x-(-a)}{0-(-a)} & \text{si } x \in]-a, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-a, 0]$ ou sur $]-a, 0]$ ou sur $]-a, 0[$! !

La fonction f_{-Y} définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de $-Y$.

La fonction $\widehat{f}_{-Y}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{f}_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in]-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est encore une densité de $-Y$.

b) X et $-Y$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes car X et Y sont indépendantes.

f_X est une densité de X bornée sur $\mathbb{R}$ et f_{-Y} est une densité de $-Y$ (également bornée sur $\mathbb{R}$).

Le théorème de convolution indique alors que $X - Y$ est une variables aléatoire à densité et que

$g : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_{-Y}(x-t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_{-Y}(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{a}\, f_{-Y}(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = x - t$ ($t \to x - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{a}\int_x^{x-a} f_{-Y}(u)\,(-1)\, \mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_{x-a}^{x} f_{-Y}(u)\, \mathrm{d}u.$$

Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Notons que si $x \in]-\infty, -a[$ alors $[x-a, x] \subset]-\infty, -a[$ et si $x \in]a, +\infty[$ alors $[x-a, x] \subset]0, +\infty[$.

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[,\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x-a}^{x} 0\, \mathrm{d}u = 0.$

$\forall x \in [-a, 0[,\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \dfrac{1}{a^2}\big(x - (-a)\big) = \dfrac{a+x}{a^2} = \dfrac{a-|x|}{a^2}$ (si $x \in [-a, 0[$, $x - a < -a$).

$\forall x \in [0, a],\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x-a}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \dfrac{1}{a^2}\big(0 - (x-a)\big) = \dfrac{a-x}{a^2} = \dfrac{a-|x|}{a^2}$ (si $x \in [0, a]$, $x - a \in [-a, 0]$ et $x \geqslant 0$).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de $X - Y$.

2) a) $\forall x \in]-\infty, 0[,\ H(x) = P(Z \leqslant x) = P(|X - Y| \leqslant x) = 0.$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ H(x) = P(Z \leqslant x) = P(|X - Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant X - Y \leqslant x) = G(x) - G(-x).$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} G(x) - G(-x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

b) Notons que g est une densité de $X - Y$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition G de $X - Y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = g(x)$.

Par composition : $x \to G(-x)$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par différence $x \to G(x) - G(-x)$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur sur $[0, +\infty[$. H est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car elle est nulle sur cet intervalle.

H est donc au moins dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Remarque H *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *SUR* $]-\infty, 0[$ *et Sur* $[0, +\infty[$. *Ceci montre qu'elle est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et qu'elle est continue à droite en* 0.

De plus $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 = G(0) - G(-0) = H(0)$ *; H est donc continue à gauche en* 0. *Finalement H est continue en* 0. *Alors H est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Cela suffit pour dire que $Z = |X - Y|$ est une variable aléatoire à densité. Ce qui n'était pas demandé car admis dans le texte.*

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ H'(x) = 0$.

On a aussi : $\forall x \in]0, +\infty[,\ H'(x) = G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x) = 2g(x)$ (g est paire sur $\mathbb{R}$).

Précisons. $\forall x \in]0, a],\ H'(x) = 2\,g(x) = 2\,\dfrac{a - |x|}{a^2} = 2\,\dfrac{a - x}{a^2} = \dfrac{2(a - x)}{a^2}$ et $\forall x \in]a, +\infty[,\ H'(x) = 0$.

Finalement : $\forall x \in]0, a],\ H'(x) = \dfrac{2(a - x)}{a^2}$ et $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[,\ H'(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

h est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec H' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi h est une densité de Z.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Z = |X - Y|.}$$

3) D'une pierre plusieurs coups. Soit k dans $\mathbb{N}$.

Montrons que Z possède un moment d'ordre k, c'est à dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

$t \to t^k\, h(t)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]a, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

$\forall t \in [0, a],\ t^k\, h(t) = t^k\, \dfrac{2(a - t)}{a^2}$. Ainsi $t \to t^k\, h(t)$ est continue sur $[0, a]$ donc $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ existe.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$. Donc Z possède un moment d'ordre k qui vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$.

Le cours montre alors que Z^k possède une espérance qui vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$.

$$E(Z^k) = \int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^a t^k\, \frac{2(a - t)}{a^2}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{a^2} \int_0^a (a\, t^k - t^{k+1})\, \mathrm{d}t = \frac{2}{a^2} \left[a\, \frac{t^{k+1}}{k + 1} - \frac{t^{k+2}}{k + 2} \right]_0^a.$$

$$E(Z^k) = \frac{2}{a^2}\left(a\,\frac{a^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+2}}{k+2}\right) = 2\,a^k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{2\,a^k}{(k+1)(k+2)}\cdot$$

En particulier $E(Z)$ existe et vaut $\dfrac{2\,a}{6}$ ou $\dfrac{a}{3}$, et $E(Z^2)$ existe et vaut $\dfrac{2\,a^2}{12}$ ou $\dfrac{a^2}{6}\cdot$

Alors Z possède une variance qui vaut $\dfrac{a^2}{6} - \left(\dfrac{a}{3}\right)^2$ ou $\dfrac{a^2}{18}\cdot$

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance et une variance. } E(Z) = \frac{a}{3} \text{ et } V(Z) = \frac{a^2}{18}\cdot}$$

4) Notons que si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$ alors $a\,U$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,a[$.

```
Function z(a:real):real; Var x,y:real; Begin
x:=a*random;y:=a*random;z:=abs(x-y); End;
```

Exercice 10 **EDHEC 2012 Ex 2**

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$, la fonction f définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{-\lambda z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}.$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \mathrm{Sup}(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\,\lambda\, e^{\lambda x}$.

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \mathrm{Inf}\,\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leqslant X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leqslant X_0)$, puis tablir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(Z = n)$ et $(X = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction en Pascal dont l'en-tête est " **function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

---

1) a) Soit x un réel strictement positif. Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

X_0 est une variable aléatoire à densité de densité φ.

Le cours (?) montre alors que $-x\,X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité $\psi_x : t \to \dfrac{1}{|-x|}\,\varphi\left(\dfrac{t-0}{-x}\right)$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \psi_x(t)=\dfrac{1}{x}\,\varphi\left(-\dfrac{t}{x}\right)$. Donc : $\forall t\in\mathbb{R},\ \psi_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{x}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,t} & \text{si } t\in]-\infty,0]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Pour tout réel x strictement positif, $-x\,X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité ψ_x définie par $\forall t\in\mathbb{R},\ \psi_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{x}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,t} & \text{si } t\in]-\infty,0]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

b) Soit x un réel strictement positif.

- X_1 et $-x\,X_0$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives φ et ψ_x.
- X_1 et X_0 sont indépendantes donc X_1 et $-x\,X_0$ sont indépendantes.
- $\forall t\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\varphi(t)\leqslant\lambda$ donc φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convolution (ou son corollaire...) permet de dire que $X_1 - x\,X_0$ est une variable aléatoire à densité et que $\widetilde{f} : z\to\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z-t)\,\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ (ou $\widetilde{f} : z\to\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\psi_x(z-t)\,\mathrm{d}t$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque *Nous ne pouvons pas encore l'appeler f dans la mesure où $X_1 - x\,X_0$ n'admet pas qu'une densité.*

Soit z un réel. $\widetilde{f}(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z-t)\,\psi_x(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\varphi(z-t)\,\frac{\lambda}{x}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,t}\,\mathrm{d}t$.

$t\to z-t$ définit une bijection strictement décroissante de $]-\infty,0[$ sur $]z,+\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Ceci justifie le changement de variable $u=z-t$ dans ce qui suit.

$$\widetilde{f}(z)=\int_{-\infty}^{0}\varphi(z-t)\,\frac{\lambda}{x}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,t}\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{x}\int_{z}^{+\infty}\varphi(u)\,e^{\frac{\lambda}{x}(z-u)}\,\mathrm{d}u=\frac{\lambda}{x}\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty}\lambda\,e^{-\lambda\,u}\,e^{\frac{\lambda}{x}(z-u)}\,\mathrm{d}u.$$

$$\widetilde{f}(z)=\frac{\lambda^2}{x}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty}e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)u}\,\mathrm{d}u=\frac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty}\lambda\,\frac{x+1}{x}\,e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)u}\,\mathrm{d}u.$$

Notons que $\lambda\,\dfrac{x+1}{x}$ est un réel strictement positif.

Soit alors F_W la fonction de répartition d'une variable aléatoire W qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda\,\dfrac{x+1}{x}$.

$$\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty}\lambda\,\frac{x+1}{x}\,e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)u}\,\mathrm{d}u=P(W>\mathrm{Max}\{0,z\})=1-P(W\leqslant\mathrm{Max}\{0,z\}))=e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)\mathrm{Max}\{0,z\}}.$$

Donc $\widetilde{f}(z)=\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}\displaystyle\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty}\lambda\,\frac{x+1}{x}\,e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)u}\,\mathrm{d}u=\frac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}\,e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)\mathrm{Max}\{0,z\}}$.

Si z est strictement négatif alors $\widetilde{f}(z)=\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}$. Si z est positif ou nul : $\widetilde{f}(z)=\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z}\,e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)z}=\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{-\lambda\,z}$.

$\forall z\in\mathbb{R},\ \widetilde{f}(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z} & \text{si } z\in]-\infty,0[\\ \dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{-\lambda\,z} & \text{si } z\in[0,+\infty[\end{cases}$. Nous pouvons maintenant dire que :

Pour tout réel strictement positif x, $X_1 - x\,X_0$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f définie par : $\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{\frac{\lambda}{x}\,z} & \text{si } z\in]-\infty,0[\\ \dfrac{\lambda}{x+1}\,e^{-\lambda\,z} & \text{si } z\in[0,+\infty[\end{cases}$.

c) X_1 et X_0 prennent presque sûrement des valeurs strictement positives donc $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ prend presque sûrement des valeurs strictement positives. Alors :

$\forall x \in]-\infty, 0],\ F_T(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_T(x) = P\left(\dfrac{X_1}{X_0} \leqslant x\right) = P(X_1 \leqslant x\, X_0) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0)$.

Sot x un élément de $]0, +\infty[$. $F_T(x) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x+1}\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\,t}\,\mathrm{d}t$.

$F_T(x) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0) = \dfrac{x}{x+1}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x+1}\times 1 = \frac{x}{x+1}$ car ψ_x est une densité de probabilité nulle sur $]0, +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}.$

Notons que l'on a encore : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$ car $F_t(0) = 0 = \dfrac{0}{0+1}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.}$$

Montrons que T est une variable aléatoire à densité ce qui sera utile dans la question suivante.

Observons que $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_T(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_T(x) = \dfrac{x}{x+1}\cdot$

Comme $x \to 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et que $x \to \dfrac{x}{x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$$\boxed{T \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

2) $X = \lfloor T \rfloor + 1$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n - 1) = P(n - 1 \leqslant T < n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = P(n - 1 < T \leqslant n)$ car T est une variable aléatoire à densité.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \dfrac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}\cdot}$$

3) On admettra seulement que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire.

a) D'après **1) a)** $-X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité ψ_1.

$$\boxed{\begin{array}{l} -X_0 \text{ est une variable aléatoire à densité de densité } \psi_1 \text{ définie par} \\ \forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{\lambda\, t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{array}}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\big(\operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x\big) = P\left(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\}\right)$.

X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ. On a alors :

$G_n(x) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x) = \big(P(X_1 \leqslant x)\big)^n = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$

Mais remarquons que l'on a aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}.$

$x \to 0$ et $x \to (1-e^{-\lambda\, x})^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Ceci suffit pour dire que G_n est continue sur la totalité de $\mathbb{R}$ et au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Alors :

$$\boxed{Y_n \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ G_n'(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ G_n'(x) = n\, \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, (1-e^{-\lambda x})^{n-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} n\, \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, (1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

g_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec G_n' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_n est une densité de Y_n.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} n\, \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, (1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Y_n.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

- Y_n et $-X_0$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives g_n et ψ_1.
- X_1, X_2, ..., X_n, X_0 sont indépendantes donc $\operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et X_0 sont indépendantes. Alors Y_n et X_0 sont indépendantes.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(t) = \begin{cases} \lambda\ e^{\lambda\, t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \psi_1(t) \leqslant \lambda$ donc ψ_1 est bornée.

Ici encore nous pouvons dire que $Y_n - X_0$ est une variable aléatoire à densité et que $\widetilde{h}_n : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x-t)\, \psi_1(t)\, \mathrm{d}t$ ou $\widetilde{h}_n : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, \psi_1(x-t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un élément de $]-\infty, 0[$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(x-t) = \begin{cases} \lambda\ e^{\lambda\, (x-t)} & \text{si } t \in [x, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Alors $\tilde{h}_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, \psi_1(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} g_n(t)\, \left(\lambda\, e^{\lambda(x-t)}\right) \mathrm{d}t.$

$\tilde{h}_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t$ car g_n est nulle sur $]-\infty, 0[$ et x est strictement négatif.

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t$.

Version 1 $\forall t \in [0,+\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t)\left(e^{-\lambda\, t} - 1 + 1\right) = -g_n(t)\,(1-e^{-\lambda\, t}) + g_n(t)$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t) - (1-e^{-\lambda\, t})\, g_n(t) = g_n(t) - (1-e^{-\lambda\, t})\, n\,\lambda\, e^{-\lambda\, t}\,(1-e^{-\lambda\, t})^{n-1}$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t) - \dfrac{n}{n+1}\,(n+1)\,\lambda\, e^{-\lambda\, t}\,(1-e^{-\lambda\, t})^n = g_n(t) - \dfrac{n}{n+1}\, g_{n+1}(t)$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$ existent et valent 1.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$

Version 2 Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties.

Soit L_n la restriction de G_n à $[0,+\infty[$. L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[,\ L_n'(t) = g_n(t)$.

Remarque Notons que nous ne pouvons pas toujours écrire $\forall t \in [0,+\infty[,\ G_n'(t) = g_n(t)$... dans la cas où $n=1$ par exemple.

De plus $t \to e^{-\lambda\, t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Soit A un réel strictement positif.

$$\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \Big[L_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\Big]_0^A - \int_0^A L_n(t)\,(-\lambda\, e^{-\lambda\, t})\,\mathrm{d}t = \Big[e^{-\lambda\, t}\, G_n(t)\Big]_0^A + \int_0^A G_n(t)\,(\lambda\, e^{-\lambda\, t})\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \int_0^A \lambda\, e^{\lambda\, t}\,(1-e^{-\lambda t})^n\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \left[\frac{(1-e^{-\lambda\, t})^{n+1}}{n+1}\right]_0^A.$$

$$\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \frac{1}{n+1}\,(1-e^{-\lambda\, A})^{n+1}.$$

$G_n(0) = 0,\ \displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda\, A} = 0,\ \lim_{A\to+\infty} G_n(A) = 1$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} (1-e^{-\lambda\, A})^{n+1} = 1$.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. Ainsi nous retrouvons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$

Finalement : $\tilde{h}_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\,\lambda\, e^{\lambda\, x}$ et ceci pour tout réel x strictement négatif.

Ne reste plus qu' à poser $h_n = \tilde{h}_n$ pour dire que :

$\boxed{Y_n - X_0 \text{ est une variable aléatoire à densité qui possède une densité } h_n \text{ telle que} : \forall x \in]-\infty,0[,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\,\lambda\, e^{\lambda x}.}$

Remarque Calculer $\tilde{h}_n(x)$ pour tout réel x positif ou nul.

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

L'événement $\{Z > n\} \cup \{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si les n événements $\{X_1 \leqslant X_0\}$, $\{X_2 \leqslant X_0\}$, ..., $\{X_n \leqslant X_0\}$ se réalisent. Alors :

$\{Z > n\} \cup \{Z = 0\} = \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant X_0\} = \{\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant X_0\} = \{Y_n \leqslant X_0\}$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \{Z > n\} \cup \{Z = 0\} = \{Y_n \leqslant X_0\}.}$

b) $\{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ $\{X_k > X_0\}$ n'est pas réalisé.

$\{Z=0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ l'événement $\{X_k \leqslant X_0\}$ est réalisé. On peut encore dire que $\{Z=0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ l'événement $\{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\}$ est réalisé. Alors :

$$\{Z=0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \Big(\{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\} \Big) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \big\{ \operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_k) \leqslant X_0 \big\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\}.$$

$$\boxed{\{Z=0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\}.}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\} \cap \{X_{k+1} \leqslant X_0\} \subset \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\}$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{Y_{k+1} \leqslant X_0\} \subset \{Y_k \leqslant X_0\}$. La suite $\big(\{Y_k \leqslant X_0\}\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Le théorème de la limite monotone montre alors que : $P(Z=0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\} \right) = \lim_{k\to+\infty} P(Y_k \leqslant X_0)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_k \leqslant X_0) = P(Y_k - X_0 \leqslant 0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 h_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\int_{-\infty}^0 \lambda\, e^{\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\int_{-\infty}^0 \psi_1(t)\,\mathrm{d}t$.

Rappelons que ψ_1 est une densité de probabilité nulle sur $]0, +\infty[$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_k \leqslant X_0) = \displaystyle\frac{1}{k+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \times 1 = \frac{1}{k+1}\cdot$

Alors $P(Z=0) = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Y_k \leqslant X_0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0$.

$$\boxed{P(Z=0)=0.}$$

c) Par incompatibilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\big(\{Z>n\} \cap \{Z=0\}\big) = P(Z>n) + P(Z=0)$.

Comme $P(Z=0)=0$ il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{Z>n\} \cap \{Z=0\} = P(Z>n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z>n) = P\big(\{Z>n\} \cap \{Z=0\}\big) = P(Y_n \leqslant X_0) = \dfrac{1}{n+1}$ (comme nous l'avons vu dans b)).

$P(Z>0) = 1 - P(Z \leqslant 0) = 1 - P(Z=0) = 1 - 0 = 1 = \dfrac{1}{0+1}\cdot$ Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z>n) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=n) = P(Z>n-1) - P(Z>n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} = P(X=n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, les événements } \{X=n\} \text{ et } \{Z=n\} \text{ ont même probabilité.}}$$

5) a) U prend ses valeurs dans $[0,1[$ donc $1-U$ prend ses valeurs dans $]0,1]$.

Alors $\ln(1-U)$ prend ses valeurs dans $]-\infty, 0]$ et $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$.

Notons F_V la fonction de répartition de V. D'après ce qui précède , $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_V(x) = 0$.

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda\, x)$.

$F_V(x) = P(1-U \geqslant e^{-\lambda\, x}) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda\, x})$. Or x appartient à $[0,+\infty[$ donc $1-e^{-\lambda\, x}$ appartient à $[0,1[$.

Comme U suit la loi exponentielle sur $[0,1[$: $\forall z \in \mathbb{R},\ P(U \leqslant z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $F_V(x) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda\, x}) = 1 - e^{-\lambda\, x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La fonction de répartition } F_V \text{ de la variable aléatoire } V = \dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U) \text{ est définie par} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{array}}$$

$$\boxed{V \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$

b) Deux versions sont possibles. L'une simulant Z l'autre simulant X en passant par T.

L'en-tête de la fonction élimine presque la version simulant directement Z car elle ne contient pas λ.

Mais peut-on lui faire confiance dans la mesure où elle contient " Z : real " ? !

Version simulant Z en passant par X.

Dans cette version on simule deux fois la loi exponentielle de paramètre λ en s'appuyant sur **a)**, on fait le quotient des deux résultats, on calcule la partie entière et on ajoute 1.

Soient U et U' deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1[$.

$-\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ et $-\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U')$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle

de paramètre λ. Donc $\dfrac{-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)}{-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U')}$ a même loi que T.

Or $\dfrac{-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)}{-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U')} = \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')}$ donc $\dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')}$ a même loi que T.

Ainsi : $\left\lfloor \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')} \right\rfloor + 1$ a même loi que X et Z.

```
function Z:integer; begin Z:=trunc(ln(1-random)/ln(1-random))+1;
end;
```

Version simulant directement Z

Elle s'appuie sur la définition de Z. Si k appartient à $\mathbb{N}^*$, Z prend la valeur k si et seulement si k est le plus petit entier tel que $\{X_k > X_0\}$ soit réalisé.

```
function Z(lambda:real):integer;

var n:integer;X0:real;

Begin

n:=0;X0:=-ln(1-random)/lambda;

repeat n:=n+1; until(-ln(1-random)/lambda>X0);

Z:=n; end;
```

Exercice 11 **EDHEC 2013 Ex 3**

1) On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
Dans la suite, on considére une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléaoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}\cdot$ On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléaoires X_k.

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}\cdot$

En déduire que : $\forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

---

1) • $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{2\,x^2} \geqslant 0$ et $\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = 0 \geqslant 0$.

Ainsi f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.

• $x \to 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1}{2\,x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ et $[1, +\infty[$.

Alors f est au moins continue en tout point de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• f est nulle sur $]-1, 1[$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

$t \to \dfrac{1}{2\,t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. $\forall x \in [1, +\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\,t}\right]_1^x = -\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Comme $t \to \dfrac{1}{2\,t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existent et valent $\dfrac{1}{2}\cdot$

Dans ces conditions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{2} + 0 + \dfrac{1}{2}$ donc 1. Ceci achève de montrer que :

$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

• Soit x un élément de $]-\infty, -1]$.

$\forall y \in]-\infty,-1],\ \displaystyle\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\,t}\right]_y^x = -\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2\,y}\cdot$

Donc $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty} \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\left(-\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2\,y}\right) = -\frac{1}{2x}\cdot$

$\forall x \in]-\infty,-1],\ F(x) = -\dfrac{1}{2x}\cdot$ En particulier $F(-1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

• Soit x un élément de $]-1,1[$.

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(-1)+0 = \frac{1}{2}$ car f est nulle sur $]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot$

• Soit x un élément de $[1,+\infty[$.

Rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(-1) = \frac{1}{2},\ \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x}$ (comme nous l'avons vu dans **1)**).

Alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,x} = 1 - \frac{1}{2\,x}\cdot$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{2\,x}\cdot$

La fonction de répartition F commune aux variables aléatoires X_k est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\,x} & \text{si } x \in]-\infty,-1] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1-\dfrac{1}{2\,x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.$$

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit x un réel.

$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant x\right) = P(S_n \leqslant nx) = P\big(\operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \leqslant nx\big)$. Alors :

$G_n(x) = P\big(\{X_1 \leqslant nx\} \cap \{X_2 \leqslant nx\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant nx\}\big)$.

Or X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes et ont pour fonction de répartition F. Ainsi :

$G_n(x) = P(X_1 \leqslant nx)\,P(X_2 \leqslant nx)\ldots P(X_n \leqslant nx) = \big(F(nx)\big)^n$.

Si $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{n}\right]$, $nx \in]-\infty,-1]$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

Si $x \in \left]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right[$, $nx \in]-1,1[$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Si $x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[$, $nx \in [1,+\infty[$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x)=\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n & \text{si } x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{n}\right]\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } x\in\left]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right[\\ \left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[\end{cases}.}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. G_n est une fonction de répartition donc G_n est croissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x\in]-\infty,0],\ G_n(x)\leqslant G_n(0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1}{2^n}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout réel } x \text{ négatif ou nul} : G_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n}\cdot}$$

b) Soit x un réel strictement positif.

Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, $x>\dfrac{1}{n}$ équivaut à $n>\dfrac{1}{x}$ car $z\to\dfrac{1}{z}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Posons alors $n_0=\text{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)+1$.

Notons que n_0 appartient à $\mathbb{N}^*$ car $\text{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ appartient à $\mathbb{N}$ puisque x est strictement positif.

Soit n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à n_0. $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\geqslant\text{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)+1>\dfrac{1}{x}\cdot$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow x>\dfrac{1}{n}\cdot$

> Pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x>\dfrac{1}{n}\cdot$

Soit x un réel strictement positif. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow x>\dfrac{1}{n}\cdot$

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[$ et ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

> Pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$

5) a) Soit x un réel.

- Supposons d'abord que x est négatif ou nul.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant G_n(x)\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)=0$.

- Supposons maintenant que x est strictement positif.

Alors il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow x>\dfrac{1}{n}$ et $G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

Soit n un élément de $[\![n_0,+\infty[\![$. Alors $x > \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2\,n\,x}\cdot$ Ainsi $1-\dfrac{1}{2\,n\,x} > 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$.

On peut alors dire que $G_n(x) = \left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n = e^{n\,\ln\left(1-\frac{1}{2\,n\,x}\right)}$ et ceci pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\,n\,x}\right) = 0$ donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,n\,x}\cdot$ Alors $n\,\ln\left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,x}\cdot$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\,\ln\left(1-\frac{1}{2\,n\,x}\right)\right) = -\frac{1}{2\,x}\cdot$

La continuité de la fonction exponentielle en $-\dfrac{1}{2\,x}$ permet de dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1-\frac{1}{2\,n\,x}\right)} = e^{-\frac{1}{2\,x}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2\,x}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.}$$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2\,x}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ car G est nulle sur $]-\infty,0]$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2\,x}} = e^0 = 1$.

- Montrons que G est croissante sur $\mathbb{R}$. Soient x et y deux réels tels que $x<y$.

Si $x<y\leqslant 0$: $G(x)=G(y)=0$ donc $G(x)\leqslant G(y)$!

Si $x\leqslant 0<y$: $G(x)=0$ et $G(y)=e^{-\frac{1}{2\,y}}$ donc $G(x)\leqslant G(y)$!

Supposons que $0<x<y$. Alors $\dfrac{1}{2\,y} < \dfrac{1}{2\,x}$ donc $-\dfrac{1}{2\,x} < -\dfrac{1}{2\,y}$. Ainsi $G(x) = e^{-\frac{1}{2\,x}} < e^{-\frac{1}{2\,y}} = G(y)$.

Finalement $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y \Rightarrow G(x)\leqslant G(y)$ donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.

- G est croissante sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$ donc G prend ses valeurs dans $[0,1]$.

- G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est continue sur $]-\infty,0]$. Alors G est continue en tout point de $]-\infty,0[$ et continue à gauche en 0.

$x\to -\dfrac{1}{2\,x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $x\to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition $x\to e^{-\frac{1}{2\,x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc G est continue sur $]0,+\infty[$. Alors G est continue en tout point de $]0,+\infty[$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{2\,x}\right) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} G(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{2\,x}} = 0 = G(0)$. Ainsi G est continue à droite en 0.

Ceci achève de montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

- G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

$x\to -\dfrac{1}{2\,x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $x\to e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $x\to e^{-\frac{1}{2\,x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et $]0,+\infty[$. Donc G est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini de points.

Les cinq points précédents montrent alors que :

$$\boxed{G \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$$

c) • Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, G_n est la fonction de répartition de Y_n.

- G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Y d'après **b)**.
- G est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$.

Alors la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

$\boxed{\text{La suite } (Y_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } Y \text{ dont la fonction de répartition est } G.}$

6) Notons $F_{\frac{1}{Y}}$ la fonction de répartition de $\dfrac{1}{Y}\cdot$

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc il en est de même pour $\dfrac{1}{Y}\cdot$ Alors $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{\frac{1}{Y}}(x) = 0$.

Soit x un réel strictement positif. $F_{\frac{1}{Y}}(x) = P\left(\dfrac{1}{Y} \leqslant x\right) = P\left(Y \geqslant \dfrac{1}{x}\right)$ car Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et x est strictement positif.

$F_{\frac{1}{Y}}(x) = 1 - P\left(Y < \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y \leqslant \dfrac{1}{x}\right)$ car Y est une variable aléatoire à densité.

$F_{\frac{1}{Y}}(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2\,(1/x)}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ car $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{\frac{1}{Y}}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{\frac{1}{Y}}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors :

$$\boxed{\frac{1}{Y} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}\cdot}$$

Exercice 12 **ECRICOME 2000 Ex 2**

a et b sont deux réels strictement positifs, s est un réel vérifiant $0 < s < 1$.

Q1 a) Etablir la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\, \mathrm{d}u$.

b) Calculer J.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre b.

On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des Y_k et suivant la loi géométrique de paramètre s.

On admet que Z définie par $Z = \text{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si ω est un élément de Ω alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels :

$$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_{N(\omega)}(\omega)$$

Q2 Soit j un entier strictement positif et t un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z \leqslant t/N = j)$.

Q3 a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une densité de Z.

Q4 Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \dfrac{-\ln(s)}{b(1-s)}$

Seul le résultat de la question 4) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.

Q5 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(t) = \dfrac{t \cdot e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ pour $t > 0$.

a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

b) Etablir, pour tout réel t appartenant à $[0, +\infty[$ et tout entier n positif, l'égalité :

$$g(t) = g(t) \cdot e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^{n} te^{-(k+1)t}$$

Q6 Justifier la convergence, pour tout entier positif k, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-(k+1)t}\, \mathrm{d}t$ et la calculer.

Q7 Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\cdot$

Q8 On admet que la somme de cette série est $\dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$, c est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}\, \mathrm{d}s$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6b}\cdot$

Q1 a) $\varphi : u \to \dfrac{1}{e^u + a}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, a est (strictement) positif donc : $\forall u \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant \varphi(u) = \dfrac{1}{e^u + a} \leqslant \dfrac{1}{e^u} = e^{-u}$.

La positivité de φ et la convergence de $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\, \mathrm{d}u$ donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\, \mathrm{d}u$

Finalement : $\boxed{J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^u+a}\,du \text{ converge}}$.

b) $aJ=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a}{e^u+a}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{ae^{-u}}{1+ae^{-u}}\,du=\lim_{x\to+\infty}\Big[-\ln|1+ae^{-u}|\Big]_0^x$.

$aJ=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(1+a)-\ln(1+ae^{-x})\Big)=\ln(1+a)$.

Ainsi $\boxed{J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^u+a}\,du=\frac{\ln(1+a)}{a}}$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ $P(Z\leqslant t/N=j)=P\big(\operatorname{Max}(Y_1,Y_2,\dots,Y_N)\leqslant t/N=j\big)=\dfrac{P\big(\{\operatorname{Max}(Y_1,Y_2,\dots,Y_N)\leqslant t\}\cap\{N=j\}\big)}{P(N=j)}$.

$P(Z\leqslant t/N=j)=\dfrac{P\big(\{\operatorname{Max}(Y_1,Y_2,\dots,Y_j)\leqslant t\}\cap\{N=j\}\big)}{P(N=j)}=\dfrac{P\big(\{Y_1\leqslant t\}\cap\{Y_2\leqslant t\}\cap\dots\cap\{Y_j\leqslant t\}\cap\{N=j\}\big)}{p(N=j)}$.

Il vient alors par indépendance : $P(Z\leqslant t/N=j)=\dfrac{P(Y_1\leqslant t)\,P(Y_2\leqslant t)\cdots P(Y_j\leqslant t)\,P(N=j)}{P(N=j)}$.

Ainsi : $P(Z\leqslant t/N=j)=P(Y_1\leqslant t)\,P(Y_2\leqslant t)\cdots P(Y_j\leqslant t)=(1-e^{-bt})^j$.

$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\ P(Z\leqslant t/N=j)=(1-e^{-bt})^j}$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) Notons F_Z la fonction de répartition de Z et remarquons que cette variable aléatoire prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $\forall t\in]-\infty,0[,\ F_Z(t)=0$. Soit t un élément de $\mathbb{R}^+$.

$\big(\{N=j\}\big)_{j\geqslant1}$ est un système complet d'événements ; la formule des probabiltés totales donne alors :

$$F_Z(t)=P(Z\leqslant t)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(Z\leqslant t/N=j)\,P(N=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}(1-e^{-bt})^j\,P(N=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}(1-e^{-bt})^j\,s(1-s)^{j-1}.$$

$$F_Z(t)=s(1-e^{-bt})\sum_{j=1}^{+\infty}\big[(1-s)(1-e^{-bt})\big]^{j-1}=s(1-e^{-bt})\sum_{k=0}^{+\infty}\big[(1-s)(1-e^{-bt})\big]^k.$$

Observons, s'il en est besoin, que $|(1-s)(1-e^{-bt})|=(1-s)(1-e^{-bt})<1$ car s est élément de $]0,1[$ et bt est positif ou nul.

Un résultat basique du cours sur les séries géométriques donne : $F_Z(t)=\dfrac{s(1-e^{-bt})}{1-(1-s)(1-e^{-bt})}=\dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}$.

Finalement : $\boxed{\forall t\in]-\infty,0[,\ F_Z(t)=0 \text{ et } \forall t\in[0,+\infty[,\ F_Z(t)=\dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}}$.

b)

<u>*Remarque*</u> *On peut encore écrire :* $\forall t\in]-\infty,0,],\ F_Z(t)=0$ *et* $\forall t\in[0,+\infty[,\ F_Z(t)=\dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}$.

Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ <u>**sur**</u> $]-\infty,0]$ *et* <u>**sur**</u> $[0,+\infty[$. *Alors F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$.*

La remarque précédente montre que la variable aléatoire Z est une variable aléatoire à densité.

De plus elle permet de dériver F_Z en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Cette dérivation donne : $\forall t\in]-\infty,0[,\ F_Z'(t)=0$ et

$$\forall t\in]0,+\infty[,\ F_Z'(t)=\frac{sbe^{-bt}(s+(1-s)e^{-bt})-s(1-e^{-bt})(1-s)(-b)e^{-bt}}{\big(s+(1-s)e^{-bt}\big)^2}=\frac{sbe^{-bt}}{\big(s+(1-s)e^{-bt}\big)^2}.$$

$\boxed{\text{L'application } f_Z \text{ définie par} : \forall t \in]-\infty, 0[,\ f_Z(t) = 0 \text{ et } \forall t \in [0, +\infty[,\ f_Z(t) = \dfrac{sbe^{-bt}}{\left(s + (1-s)e^{-bt}\right)^2} \text{, est alors une densité de } Z.}$

Q4 Notons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Remarquons que : $\forall t \in [0, +\infty[,\ f_Z(t) = \dfrac{sbe^{bt}}{\left(se^{bt} + 1 - s\right)^2}$ (multiplication du numérateur et du dénominateur par $(e^{bt})^2$)

et que $t \to -\dfrac{1}{se^{bt} + 1 - s}$ est une primitive de $t \to \dfrac{sbe^{bt}}{\left(se^{bt} + 1 - s\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. Une intégration par parties simple nous donne :

$$\int_0^x t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-t}{se^{bt} + 1 - s}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{se^{bt} + 1 - s}\,\mathrm{d}t = \frac{-x}{se^{bx} + 1 - s} + \int_0^x \frac{1}{se^{bt} + 1 - s}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{se^{bx} + 1 - s} = 0$ (croissance comparée), donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{se^{bt} + 1 - s}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Mieux en cas d'existence ces deux intégrales sont égales.

Le changement de variable $u = bt$ donne : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{se^{bt} + 1 - s}\,\mathrm{d}t = \int_0^{bx} \frac{1}{b(se^u + 1 - s)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{bs}\int_0^{bx} \frac{1}{e^u + \frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}u.$

La question 1 donne alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{bx} \frac{1}{e^u + \frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln\left(1 + \frac{1-s}{s}\right)}{\frac{1-s}{s}} = \frac{-s\ln s}{1-s}$ car $\dfrac{1-s}{s}$ est strictement positif.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut : $\dfrac{-s\ln s}{bs\,(1-s)} = -\dfrac{\ln s}{b\,(1-s)}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{\ln s}{b\,(1-s)}$.

$\boxed{Z \text{ admet une espérance qui vaut} : -\dfrac{\ln s}{b(1-s)}}$.

Q5 a) Commençons par remarquer que : $\forall t \in]0, +\infty[,\ g(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$.

g est de toute évidence continue sur $]0, +\infty[$. De plus $\dfrac{t}{e^t - 1} \sim \dfrac{t}{t} = 1$ en 0, donc $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = g(0)$; g est également continue en 0.

$\boxed{g \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$.

<u>Remarque</u> *A titre d'exercice on pourra montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ ($g'(0) = -1/2$).*

Donnons deux idées pour montrer que g est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \to e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x + 1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$.

Alors : $\forall t \in]0, +\infty[,\ e^t - 1 \geqslant t > 0$; $\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 < g(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} \leqslant 1$.

Mieux : $\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 < g(t) \leqslant 1 \text{ et } g \text{ est bornée sur } [0, +\infty[}$.

Retrouvons ce résultat en remarquant que : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t - 1} = 0$.

Alors il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in]A, +\infty[, |g(t)| \leqslant 2000$!

g est donc bornée sur l'intervalle $]A, +\infty[$. De plus g est continue sur le <u>**segment**</u> $[0, A]$ donc g est également bornée sur $[0, A]$. Ainsi g est bornée sur $[0, +\infty[$.

<u>Remarque</u> *On peut encore traiter cette question en montrant que g est décroissante* $[0,+\infty[$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et t un réel positif.

Si $t=0$, $g(t)\ e^{-(n+1)t}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}=1\times 1+0=1=g(t)$. Dès lors supposons t strictement positif, ce qui donne en particulier : $e^{-t}\neq 1$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}=\sum_{k=0}^{n} t\ \left(e^{-t}\right)^{k+1}=t\ e^{-t}\ \frac{1-\left(e^{-t}\right)^{n+1}}{1-e^{-t}}=g(t)\ (1-e^{-(n+1)t})=g(t)-g(t)\ e^{-(n+1)t}$.

Donc : $g(t)\ e^{-(n+1)t}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}=g(t)$.

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,+\infty[,\ g(t)=g(t)\ e^{-(n+1)t}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}}$.

Q6 Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Posons : $\forall t\in\mathbb{R},\ h_{k+1}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ (k+1)e^{-(k+1)t} & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$.

h_{k+1} est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T_{k+1} qui suit une loi exponentielle de paramètre $k+1$.

Le cours nous indique que T_{k+1} possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{k+1}\cdot$

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t h_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{k+1}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t(k+1)e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut également $\dfrac{1}{k+1}\cdot$

Alors $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{1}{(k+1)^2}}$.

Q7 g est continue et <u>positive</u> sur $[0,+\infty[$, $g(t)\sim t\,e^{-t}$ en $+\infty$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (d'après la question précédente).

Cela suffit très largement pour dire que $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ g(t)=g(t)\ e^{-(n+1)t}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$.

Ceci permet alors de dire que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et d'écrire que :

$$\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{n}\int_{0}^{+\infty} t\,e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}=\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$.

Dès lors montrons que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t=0$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant g(t)\leqslant 1$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant g(t)\,e^{-(n+1)t}\leqslant e^{-(n+1)t}$.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 car h_{n+1} est une densité de probabilité. Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}(n+1)e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut également 1. Alors $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{n+1}$

Nous pouvons donc écrire que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(n+1)t}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(n+1)t}\, \mathrm{d}t = 0.$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t.$

La série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t}$.

Q8 Notons que $s \to \dfrac{-\ln s}{1-s}$ est continue sur $]0,1[$ et même prolongeable par continuité en 1.

Soit α et β deux éléments de $]0,1[$.

Le changement de variable $t = -\ln s$ ou $s = e^{-t}$ donne :

$$\int_\alpha^\beta \frac{-\ln s}{1-s}\, \mathrm{d}s = \int_{-\ln\alpha}^{-\ln\beta} \frac{t}{1-e^{-t}}\, (-e^{-t})\, \mathrm{d}t = \int_{-\ln\beta}^{-\ln\alpha} \frac{t\, e^{-t}}{1-e^{-t}}\, \mathrm{d}t = \int_{-\ln\beta}^{-\ln\alpha} g(t)\, \mathrm{d}t$$

Remarquons alors que $\displaystyle\lim_{\alpha\to0} (-\ln\alpha) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\beta\to1} (-\ln\beta) = 0$, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{1-s}\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)}\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{6b}$.

$\boxed{\text{La valeur moyenne de } E(Z) \text{ sur }]0,1[\text{ est } \dfrac{\pi^2}{6b}}$.

Exercice 13 **ECRICOME 2001 Ex 1**

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

Q1 Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

Q2 Montrer que $Y-X$ admet une densité, notée h, définie par

$$h(t)=\frac{ab}{a+b}\,e^{-bt}\quad\text{pour}\quad t>0\quad\text{et}\quad h(t)=\frac{ab}{a+b}\,e^{at}\quad\text{pour}\quad t\leqslant 0$$

On considère la variable aléatoire $Z=|X-Y|$.

Q3 Soit s un réel positif. Etablir l'égalité : $P(Z\leqslant s)=1-\dfrac{b\,e^{-as}+a\,e^{-bs}}{a+b}$.

Q4 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Dans toute la suite, si T est une variable aléatoire, nous noterons F_T sa fonction de répartition.

Q1 X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre a. Ainsi sa fonction de répartition est définie par : $\forall x\in\,]-\infty,0[,\ F_X(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[,\ F_X(x)=1-e^{-ax}$.

Déterminons la fonction de répartition de $-X$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-X}=P(-X\leqslant x)=P(X\geqslant -x)=1-P(X<-x)=1-F_X(-x)$.

Ainsi : $\forall x\in\,]-\infty,0],\ F_{-X}(x)=1-(1-e^{-a(-x)})$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F_{-X}(x)=1-0$.

Alors $\forall x\in\,]-\infty,0],\ F_{-X}(x)=e^{ax}$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F_{-X}(x)=1$.

Ou $\boxed{\forall x\in\,]-\infty,0[,\ F_{-X}(x)=e^{ax}\text{ et }\forall x\in[0,+\infty[,\ F_{-X}(x)=1.}$

Il est aisé de vérifier que F_{-X} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $\forall x\in]-\infty,0[,\ F'_{-X}(x)=ae^{ax}$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F'_{-X}(x)=0$.

$\boxed{\text{Dès lors, posons : }\forall x\in]-\infty,0],f(x)=ae^{ax}\text{ et }\forall x\in]0,+\infty[,f(x)=0.\ f\text{ est une densité de }-X}$.

Q2 Posons $\forall x\in\,]-\infty,0[,\ g(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[,\ g(x)=be^{-bx}$; g est une densité de Y car Y suit une loi exponentielle de paramètre b.

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes il en est alors de même pour Y et $-X$. De plus Y et $-X$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives g et f. Notons que f est bornée (et même g). Le cours nous permet alors de dire que $Y-X=Y+(-X)$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-u)\,f(u)\,\mathrm{d}u$$

Fixons t dans $\mathbb{R}$. $h(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}g(t-u)\,ae^{au}\,\mathrm{d}u$.

Le changement de variable $v=t-u$ donne alors : $h(t)=-\displaystyle\int_{+\infty}^{t}g(v)\,ae^{a(t-v)}\,\mathrm{d}v=a\int_{t}^{+\infty}g(v)\,e^{a(t-v)}\,\mathrm{d}v$.

Ainsi : $h(t)=a\displaystyle\int_{\mathrm{Max}\{t,0\}}^{+\infty}be^{-bv}\,e^{a(t-v)}\,\mathrm{d}v$. Posons, pour simplifier les écritures, $z=\mathrm{Max}\{t,0\}$.

$h(t) = a \displaystyle\int_z^{+\infty} b e^{-bv}\, e^{a(t-v)}\, \mathrm{d}v = ab\, e^{at} \displaystyle\int_z^{+\infty} e^{-(a+b)v}\, \mathrm{d}v.$

$h(t) = ab\, e^{at} \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left[\frac{e^{-(a+b)v}}{-(a+b)}\right]_z^A = ab\, e^{at} \left[\frac{e^{-(a+b)z}}{(a+b)}\right] = \frac{ab}{a+b}\ e^{a(t-z)-bz}.$

Si t appartient à $]-\infty,0]$, $z=0$ et $h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{at}$ et si t appartient à $]0,+\infty[$, $z=t$ et $h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{-bt}$

Dès lors la fonction h définie par $\forall t \in]-\infty,0],\ h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{at}$ et $\forall t \in]0,+\infty[,\ h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{-bt}$ est une densité de $Y-X$.

Q3 Soit s un élément de $[0,+\infty[$. $P(Z \leqslant s) = P(|X-Y| \leqslant s) = P(|Y-X| \leqslant s) = P(-s \leqslant Y-X \leqslant s) = \displaystyle\int_{-s}^{s} h(t)\, \mathrm{d}t.$

$P(Z \leqslant s) = \displaystyle\int_{-s}^{0} \frac{ab}{a+b}\ e^{at}\, \mathrm{d}t + \int_0^s \frac{ab}{a+b}\ e^{-bt}\, \mathrm{d}t = \frac{ab}{a+b}\left(\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-s}^{0} + \left[\frac{e^{-bt}}{-b}\right]_0^s\right) = \frac{ab}{a+b}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\, e^{-as} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b}\, e^{-bs}\right].$

$P(Z \leqslant s) = \dfrac{ab}{a+b}\left[\dfrac{a+b}{ab} - \dfrac{1}{ab}\left(b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}\right)\right] = 1 - \dfrac{b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}}{a+b}\cdot$

Finalement : $\boxed{\forall s \in [0,+\infty[,\ P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}}{a+b}}$.

Q4 a) Nous venons de voir que : $\forall s \in [0,+\infty[,\ F_Z(s) = P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}}{a+b}\cdot$ F_Z est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De toute évidence : $\forall s \in]-\infty,0[,\ F_Z(s) = P(|X-Y| \leqslant s) = 0$. Comme $F_Z(0) = 0$ nous pouvons même écrire que : $\forall s \in]-\infty,0],\ F_Z(s) = 0$. Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, non ?

Ceci suffit pour dire que $\boxed{\text{Z est une variable aléatoire à densité}}$.

$\forall s \in]-\infty,0[,\ F_Z'(s) = 0$ et $\forall s \in]0,+\infty[,\ F_Z'(s) = 0 - \dfrac{b\,(-a)e^{-as} + a\,(-b)e^{-bs}}{a+b} = \dfrac{ab}{a+b}\ \left[e^{-as} + e^{-bs}\right].$

Dès lors la fonction ℓ définie par $\forall s \in]-\infty,0[,\ \ell(s) = 0$ et $\forall s \in [0,+\infty[,\ \ell(s) = \dfrac{ab}{a+b}\ \left[e^{-as} + e^{-bs}\right]$ est une densité de $|X-Y|$.

b) Posons $\forall s \in]-\infty,0[,\ \hat{f}(s) = 0$ et $\forall s \in [0+\infty[,\ \hat{f}(s) = a\, e^{-at}$.

$\hat{f}$ est une densité de X et $\ell = \dfrac{1}{a+b}\ \left[b\, \hat{f} + a\, g\right]$.

X (resp. Y) possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{a}$ (resp. $\dfrac{1}{b}$). Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\, \hat{f}(s)\, \mathrm{d}s$ (resp. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\, g(s)\, \mathrm{d}s$) existe et vaut $\dfrac{1}{a}$ (resp. $\dfrac{1}{b}$).

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\, \ell(s)\, \mathrm{d}s$ existe et vaut $\dfrac{1}{a+b}\ \left[b\, \dfrac{1}{a} + a\, \dfrac{1}{b}\right]$. $\boxed{Z = |X-Y| \text{ admet une espérance qui vaut : } \dfrac{b^2+a^2}{ab(a+b)}\cdot}$
