Exercice 1 **EDHEC 1998 Ex 3**

Q1 On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de répartition de Z.

c) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

Q2 Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.

b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.

c) Déterminer l'espérance de Z.

d) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 2 **EDHEC 2000 Ex 1**

Q1 La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

b) Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t,h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)} h$.

On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$.

La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.

Q2 Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.

a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\, du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

Q3 La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Exercice 3 **EDHEC 2002 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\forall (x.y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x)f_2(y) = g(x^2+y^2).$$

Q1 On suppose, dans cette question seulement, que X_1, et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}}$.

Q2 a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \dfrac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

b) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.

Soient x_1, et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1) = h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c) Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x) = f_1(x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Montrer que k est constante sur $]0,+\infty[$ ainsi que sur $]-\infty,0[$. En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis **montrer qu'il existe un réel K tel que** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K\, e^{\frac{ax^2}{2}}.$$

d) Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif.

On pose dorénavant $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e) En déduire que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_1)$.

Q3 On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_2)$.

Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1 = \sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

Exercice 4 EDHEC 2004 Ex 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z = X+Y$.

Q1 a) Déterminer une densité de Z.

b) Montrer que, pour tout x de $]0,1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1-x < Z \leqslant 1+x)$ sont indépendants.

Q2 a) On pose $T = \mathrm{Max}(X,Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que T est une variable à densité puis donner une densité de T.

b) En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c) On pose $U = |X-Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

Exercice 5 EDHEC 2005 Ex 2

Pour tout réel x, on note $\mathrm{Ent}\,(x)$ la partie entière de x et on rappelle que $\mathrm{Ent}\,(x)$ est le seul entier vérifiant : $\mathrm{Ent}\,(x) \leqslant x < \mathrm{Ent}\,(x)+1$.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \text{Ent}\,(X)\,,\ X_2 = \text{Ent}\,(10(X - X_1))$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $((\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1 a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.

c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.

Q2 a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.

b) Justifier que, pour tout k élément de $[\![0, 9]\!]$, $P(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P\big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\big)$, puis montrer que :

$$\forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\Big(i + \frac{k+1}{10}\Big) - F\Big(i + \frac{k}{10}\Big)\right).$$

En déduire que : $\quad \forall k \in [\![0, 9]\!],\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$

Q3 Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 6 **EDHEC 2006 Ex 3**

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indé pendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

JF : nous supposerons que φ est l'unique densité de X continue sur $\mathbb{R}$...

On pose $Z = \text{Sup}(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

Q1 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 2\,\varphi(x)\,\Phi(x)$

Q2 a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\text{dt}$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\text{dt}$.

c) En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} x\,f(x)\text{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\text{dt}$$

d) Montrer de même que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\text{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\text{d t}$.

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

Q3 a) a. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Exercice 7 **EDHEC 2007 Ex 3**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

Q2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}\cdot$

Q3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-t} dt$.

Q4. a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}\cdot$

b) On admet que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz$.

Exercice 8 **EDHEC 2008 Ex 1**

Q1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2\,x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Dans la suite X et Y sont deux variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

d) Déterminer la probabilité pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2\,X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9 **EDHEC 2010 Ex 3**

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables alétoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.

b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur $[0,1[$.

Compléter la déclaration de la fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
Var x, y : real ;
Begin
x := .......... ; y := .......... ; z := .......... ;
End ;
```

Exercice 10 **EDHEC 2012 Ex 2**

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$, la fonction f définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{-\lambda z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}.$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \mathrm{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\,\lambda\, e^{\lambda x}$.

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \mathrm{Inf}\,\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leqslant X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leqslant X_0)$, puis tablir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(Z = n)$ et $(X = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction en Pascal dont l'en-tête est " **function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

Exercice 11 **EDHEC 2013 Ex 3**

1) On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
Dans la suite, on considére une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléaoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellemment indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}\cdot$ On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléaoires X_k.

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}\cdot$

En déduire que : $\forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n\cdot$

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 12 **ECRICOME 2000 Ex 2**

a et b sont deux réels strictement positifs, s est un réel vérifiant $0 < s < 1$.

Q1 a) Etablir la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,\mathrm{d}u$.

b) Calculer J.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre b.

On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des Y_k et suivant la loi géométrique de paramètre s.

On admet que Z définie par $Z = \text{Max}(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si ω est un élément de Ω alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels :

$$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_{N(\omega)}(\omega)$$

Q2 Soit j un entier strictement positif et t un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z \leqslant t/N = j)$.

Q3 a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une densité de Z.

Q4 Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \dfrac{-\ln(s)}{b(1-s)}$

Seul le résultat de la question 4) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.

Q5 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(t) = \dfrac{t \cdot e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ pour $t > 0$.

a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

b) Etablir, pour tout réel t appartenant à $[0, +\infty[$ et tout entier n positif, l'égalité :

$$g(t) = g(t) \cdot e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^{n} te^{-(k+1)t}$$

Q6 Justifier la convergence, pour tout entier positif k, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Q7 Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q8 On admet que la somme de cette série est $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$, c est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}\,\mathrm{d}s$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6b}$.

Exercice 13 ECRICOME 2001 Ex 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

Q1 Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

Q2 Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{-bt} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{at} \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

Q3 Soit s un réel positif. Etablir l'égalité : $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\, e^{-as} + a\, e^{-bs}}{a+b}$.

Q4 a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
