

**Exercice 1** EDHEC 1998 Ex 3

**Q1** On dit que  $Z$  suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de  $Z$  est  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .

- Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .
- Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de  $V = Z_1 + Z_2$ .

**Q2** Dans cette question,  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose  $Z = X - Y$ .

- Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de  $-Y$ .
- Déterminer une densité de  $Z$  et vérifier que  $Z$  suit la loi exponentielle bilatérale.
- Déterminer l'espérance de  $Z$ .
- On pose  $T = |Z|$ . Déterminer la fonction de répartition de  $T$  et vérifier que  $T$  suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

**Exercice 2** EDHEC 2000 Ex 1

**Q1** La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et nulle sur  $\mathbb{R}_-$ . On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

a) On désigne par  $t$  et  $h$  deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction  $F$ , la probabilité  $p(t, h)$  que le composant tombe en panne avant l'instant  $t + h$  sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant  $t$ .

b) Établir que, lorsque  $h$  est au voisinage de  $0^+$ ,  $p(t, h) \sim \frac{f(t)}{1 - F(t)} h$ .

On pose désormais, pour tout réel positif  $t$  :  $\lambda_X(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . On a bien sûr  $\lambda_X(t) \geq 0$ .

La fonction positive  $\lambda_X$  est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de  $X$ .

**Q2** Soit  $X$  une variable aléatoire qui possède une densité continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et de taux de panne  $\lambda_X$ .

a) Pour tout réel strictement positif  $t$ , calculer  $\int_0^t \lambda_X(u) du$  puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne"  $\lambda_X$  permet de déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

b) Dédurre de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

**Q3** La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire  $X$  dont le "taux de panne" est la fonction  $\lambda_X$  définie par  $\lambda_X(t) = t^3$ .

- Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?
- Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

**Exercice 3** EDHEC 2002 Ex 3

On considère deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  de densités respectives  $f_1$  et  $f_2$  strictement positives et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose qu'il existe une fonction  $g$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x)f_2(y) = g(x^2 + y^2).$$

**Q1** On suppose, dans cette question seulement, que  $X_1$ , et  $X_2$  suivent toutes les deux la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}}$ .

**Q2** a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, \frac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \frac{2g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$

b) On note  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = \frac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$ .

Soient  $x_1$ , et  $x_2$  deux réels distincts et non nuls. Montrer que  $h(x_1) = h(x_2)$  et en déduire que  $h$  est une fonction constante sur  $\mathbb{R}^*$ . On note  $a$  cette constante.

c) Soit  $k$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $k(x) = f_1(x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$ .

Montrer que  $k$  est constante sur  $]0, +\infty[$  ainsi que sur  $] - \infty, 0[$ . En déduire que  $k$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , puis **montrer qu'il existe un réel  $K$  tel que :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = K e^{\frac{ax^2}{2}}.$$

d) Utiliser le fait que  $f_1$  est une densité de probabilité pour montrer que  $a$  est strictement négatif.

On pose dorénavant  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{-1}{a}}$ .

e) En déduire que  $X_1$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$ .

**Q3** On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel  $\sigma_2$  strictement positif tel que  $X_2$  suive la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_2)$ .

Montrer, en revenant à la définition de  $g$  et en calculant  $g(1)$  de deux façons, que  $\sigma_1 = \sigma_2$ , c'est-à-dire que  $X_1$  et  $X_2$  suivent toutes les deux la même loi normale.

#### **Exercice 4** EDHEC 2004 Ex 3

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies toutes les deux sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose  $Z = X + Y$ .

**Q1** a) Déterminer une densité de  $Z$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0, 1[$ , les événements  $(Z > 1)$  et  $(1 - x < Z \leq 1 + x)$  sont indépendants.

**Q2** a) On pose  $T = \text{Max}(X, Y)$ . On admet que  $T$  est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

a) Montrer que  $T$  est une variable à densité puis donner une densité de  $T$ .

b) En déduire que  $T$  possède une espérance  $E(T)$  et la déterminer.

c) On pose  $U = |X - Y|$  et on admet que  $U$  est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Montrer que  $U$  est combinaison linéaire de  $Z$  et  $T$ , puis en déduire l'espérance de  $U$ .

#### **Exercice 5** EDHEC 2005 Ex 2

Pour tout réel  $x$ , on note  $\text{Ent}(x)$  la partie entière de  $x$  et on rappelle que  $\text{Ent}(x)$  est le seul entier vérifiant :  $\text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1$ .

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda > 0$ ). On note  $F$  sa fonction de répartition.

On pose  $X_1 = \text{Ent}(X)$ ,  $X_2 = \text{Ent}(10(X - X_1))$  et l'on admet que  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires définies elles aussi sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Q1** a) Déterminer  $X_1(\Omega)$ .

b) Pour tout  $k$  de  $X_1(\Omega)$ , exprimer  $P(X_1 = k)$  à l'aide de  $F$ .

c) En déduire que  $X_1 + 1$  suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer  $E(X_1)$  en fonction de  $\lambda$ .

**Q2** a) Déterminer  $X_2(\Omega)$  et dire ce que représente  $X_2$ .

b) Justifier que, pour tout  $k$  élément de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ ,  $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\})$ , puis montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left( F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right) \right).$$

En déduire que :  $\forall k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$ .

**Q3** Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

**Exercice 6** EDHEC 2006 Ex 3

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée  $\varphi$  et de fonction de répartition notée  $\Phi$ ).

*JF* : nous supposons que  $\varphi$  est l'unique densité de  $X$  continue sur  $\mathbb{R}$ ...

On pose  $Z = \text{Sup}(X, Y)$  et l'on se propose de déterminer la loi de  $Z$ , ainsi que son espérance et sa variance.

Q1 a) Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

b) Vérifier que  $Z$  admet pour densité la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$

Q2 a) Rappeler la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ .

b) En déduire la convergence et la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

c) En remarquant que, pour tout réel  $x$ ,  $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ , montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

d) Montrer de même que :  $\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ .

En déduire que  $Z$  a une espérance et donner sa valeur.

Q3 a) a. Montrer que  $X^2$  et  $Z^2$  suivent la même loi.

b) Déterminer  $E(Z^2)$ , puis donner la valeur de la variance de  $Z$ .

**Exercice 7** EDHEC 2007 Ex 3

On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A})$ , mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Q1. Rappeler quelle est la loi suivie par  $S_n$ . Donner l'espérance et la variance de  $S_n$ .

Q2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$ .

Q3. En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$ .

Q4. a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que  $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$ .

b) On admet que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ . En déduire un nouvel équivalent de  $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz$ .

**Exercice 8** EDHEC 2008 Ex 1

Q1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels  $x$  et  $y$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Q2. Dans la suite  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

a) Déterminer une densité de  $X^2$  (on ne demande pas de vérifier que  $X^2$  est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de  $-Y$  (on ne demande pas de vérifier que  $-Y$  est une variable aléatoire à densité).

c) En déduire que la variable aléatoire  $X^2 - Y$  admet pour densité la fonction  $h$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0[ \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Déterminer la probabilité pour que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 9** EDHEC 2010 Ex 3

Dans cet exercice,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur  $[0, a[$ .

On pose  $Z = |X - Y|$  et on admet que  $-Y$ ,  $X - Y$  et  $Z$  sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1) a) Déterminer une densité de  $-Y$ .

b) En déduire que la variable aléatoire  $X - Y$  admet pour densité la fonction  $g$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note  $G$  la fonction de répartition de  $X - Y$ .

2) a) Exprimer la fonction de répartition  $H$  de la variable aléatoire  $Z$  en fonction de  $G$ .

b) En déduire qu'une densité de  $Z$  est la fonction  $h$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

3) Montrer que  $Z$  possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

Compléter la déclaration de la fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de  $Z$ .

```
Function z (a : real) : real ;
```

```
Var x, y : real ;
```

```
Begin
```

```
x := ..... ; y := ..... ; z := ..... ;
```

```
End ;
```