INTÉGRATION

Exercice 1 f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$. Posons $M = \operatorname*{Max}_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |t^n\, f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = M\,\frac{1}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement donne alors sans difficulté le résultat.

Exercice 2 Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit α un réel non nul. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\left(-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\right)\right]_a^b + \frac{1}{\alpha}\int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left(f(a)\cos(\alpha a) - f(b)\cos(\alpha b) + \int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\alpha|}\left(|f(a)\cos(\alpha a)| + |f(b)\cos(\alpha b)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t\right|\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\alpha|}\left(|f(a)||\cos(\alpha a)| + |f(b)||\cos(\alpha b)| + \int_a^b |f'(t)||\cos(\alpha t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\alpha|}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Le théorème d'encadrement donne alors sans difficulté le résultat.

Remarque Ce résultat vaut encore si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ mais la démonstration nécessite des outils que nous n'avons pas dans notre cours.

Exercice 3 Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Même type de démonstration que pour le résultat précédent.

Exercice 4 Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$: $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}$ et q un élément de $\mathbb{N}^*$.

Une intégration par parties simple donne (avec $u'(t) = t^p$ et $v(t) = (1-t)^q$) :

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}.$$

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$. En itérant on obtient pour p et q dans $\mathbb{N}$:

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}I_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}I_{p+q,0}.$$

Observons que : $I_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$. Ainsi $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

En toute rigueur ce résultat se confirme par une récurrence... non immédiate !

Elle peut se faire sur p ou sur q mais il convient de ne pas fixer la variable qui ne pilote pas la récurrence.

En clair, si la récurrence se fait sur p, la propriété pour p est $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 5 Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t \int_0^\pi \cos pt\ \cos qt\,\mathrm{d}t$ lorsque p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$ (trois cas $p = q = 0$, $p = q \neq 0$ et $p \neq q$).

Soient p et q deux éléments de $\mathbb{N}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin pt\ \sin qt = -\frac{1}{2}\Big(\cos(pt+qt) - \cos(pt-qt)\Big)$.

Alors $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p-q)t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)t)\,\mathrm{d}t$.

Si $p = q = 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t = 0$ (ou $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 0\,\mathrm{d}t = 0$).

Si $p = q \neq 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Si $p \neq q$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}}$$

Un calcul analogue donne :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \int_0^\pi \cos pt\ \cos qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}}$$

Exercice 6 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t=0$ (en utilisant la définition).

Pososons, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

Montrons donc que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p\Rightarrow|I_n|<\varepsilon$.

Commençons par un petit travail préliminaire. Soit a un élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$|I_n|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{a}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t+\int_a^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$

$|I_n|\leqslant\int_0^{a}(\sin a)^n\,\mathrm{d}t+\int_a^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}t$ car sin est positive, croissante et majorée par 1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $|I_n|\leqslant a\,(\sin a)^n+\left(a-\frac{\pi}{2}\right)$. Observons également que $\lim_{n\to+\infty}a\,(\sin a)^n=0$.

Dès lors considérons un élément ε de $\mathbb{R}^{+*}$. Choisissons $\boxed{\text{un}}$ élément a de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\left(a-\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ (n'importe quel élément de l'intervalle $\left]\mathrm{Max}\,(0,\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}),\frac{\pi}{2}\right[$ convient).

Ainsi $\forall n\in N,\ |I_n|<a\,(\sin a)^n+\frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim_{n\to+\infty}a\,(\sin a)^n=0$, par conséquent : $\exists p\in N,\ \forall n\in N,\ n\geqslant p\Rightarrow a\,(\sin a)^n=|a\,(\sin a)^n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n\in N,\ n\geqslant p\Rightarrow|I_n|<a\,(\sin a)^n+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Ceci achève de montrer que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p\Rightarrow|I_n|<\varepsilon$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

<u>Exercice</u> f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t=f(0)$.

Exercice 7 f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et g est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\,g\left(\frac{k+1}{n}\right)=\int_0^1(fg)(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\,g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ et $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(fg)\left(\frac{k}{n}\right)$.

fg est continue sur $[0,1]$ donc $\lim_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1(fg)(t)\,\mathrm{d}t$. De plus $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n+(u_n-v_n)$.

Ainsi pour montrer que $\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1(fg)(t)\,\mathrm{d}t$ il suffit de prouver que $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Comme g' est continue sur le segment $[0,1]$, posons $M_1=\mathop{\mathrm{Max}}_{t\in[0,1]}|g'(t)|$.

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'écrire que : $\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |g(x)-g(y)|\leqslant M_1\,|x-y|$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. $|u_n-v_n|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right]\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$.

$|u_n-v_n|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|M_1\left|\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right|=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)=\int_0^1|f(t)|\,dt$ (car $|f|$ est continue sur $[0,1]$).

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)=0$. Par encadrement il vient alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ce qui achève l'exercice.

Exercice 8 a est un élément de $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Montrer en utilisant des sommes de Riemann que :

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta=\begin{cases}0 & \text{si } |a|<1\\ \pi\,\ln a^2 & \text{si } |a|>1\end{cases}$$

• Soit θ un élément de $[0,\pi]$. $1-2a\cos\theta+a^2=(a-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta=(a-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$.

Si θ appartient à $]0,\pi[:1-2a\cos\theta+a^2=(a-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\geqslant\sin^2\theta>0$.

Si $\theta=0:1-2a\cos\theta+a^2=(a-1)^2>0$ et si $\theta=\pi:1-2a\cos\theta+a^2=(a+1)^2>0$.

Par conséquent $\theta\to1-2a\cos\theta+a^2$ est une fonction continue et strictement positive sur $[0,\pi]$

Donc $f:\theta\to\ln(1-2a\cos\theta+a^2)$ est définie et continue sur $[0,\pi]$. Ainsi $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta$ existe.

• Mieux $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta=\int_0^\pi f(\theta)\,d\theta=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. $S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+a^2\right)$.

$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left((a-e^{i\frac{k\pi}{n}})(a-e^{-i\frac{k\pi}{n}})\right)=\frac{\pi}{n}\ln P_n$ avec $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left((a-e^{i\frac{k\pi}{n}})(a-e^{-i\frac{k\pi}{n}})\right)$.

$P_n=\prod_{k=0}^{n-1}(a-e^{i\frac{k\pi}{n}})\prod_{k=0}^{n-1}(a-e^{-i\frac{k\pi}{n}})$. Notons que $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $e^{-i\frac{k\pi}{n}}=e^{-i\frac{k\pi}{n}+2i\pi}=e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}$.

Ainsi $\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}\right)=\prod_{k=n+1}^{2n}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$ et $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$.

$P_n=\frac{a-e^{i\frac{2n\pi}{n}}}{a-e^{i\frac{n\pi}{n}}}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=\frac{a-1}{a+1}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$.

Posons $\forall k\in[\![0,2n-1]\!]$, $z_k=e^{i\frac{k\pi}{n}}=e^{i\frac{k2\pi}{2n}}$.

z_0, z_1, ..., z_{2n-1} sont les racines $(2n)^{\text{ème}}$ de l'unité c'est à dire les $2n$ racines du polynôme normalisé $X^{2n}-1$.

Alors $X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-z_k)=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$. En particulier $a^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(a-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$

Par conséquent $P_n=\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)$ et $S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)\right)$.

Supposons $|a|<1$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)\right)=\ln\left(\frac{1-a}{a+1}\right)$ car $\lim_{n\to+\infty}a^{2n}=0$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}=0$, $\lim_{n\to+\infty}S_n=0$. Alors $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta=0$.

Supposons $|a|>1$. $\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)\right)=\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(1-a^{-2n})\,a^{2n}\right)=\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(1-a^{-2n})\right)+n\ln(a^2)$.

$S_n = \dfrac{\pi}{n} \ln\left(\dfrac{a-1}{a+1}(1-a^{-2n})\right) + \pi \ln(a^2)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{a-1}{a+1}(1-a^{-2n})\right) = \ln\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pi \ln a^2$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos\theta + a^2)\, d\theta = \pi \ln a^2$.

Exercice 9 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \ln 2$.

$t \to \dfrac{\cos t}{t}$ est définie et continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, le segment d'extrémités x et $2x$ est soit dans $]-\infty, 0[$ soit dans $]0, +\infty[$.

Ainsi $x \to \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = \int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt + \ln|2x| - \ln|x| = \int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt + \ln 2$.

$f : t \to \dfrac{\cos t - 1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}\dfrac{-t^2}{2} = -\dfrac{t}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$.

f est alors prolongeable en une fonction continue g sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = G(2x) - G(x) + \ln 2$. G étant dérivable sur $\mathbb{R}$ est en particulier continue en 0.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt = G(0) - G(0) + \ln 2 = \ln 2$.

Exercice Soit f une fonction numérique continue sur $[-a, a]$ $(a > 0)$ et dérivable en 0.

Montrer que si b et c sont deux réels strictement positifs : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{bx}^{cx} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(0) \ln \frac{c}{b}$.

Exercice Etudier $\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Exercice 10 **Leïbniz, Taylor, limite de la dérivée ; la totale quoi.**

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(0) = 0$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et $g(0) = f'(0)$ et on se propose de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} f^{(k)}(x).$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et a un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'odre $n+1$ (entre x et 0 et pas 0 et x...), montrer que :

$$\forall x \in [-a, 0[\cup]0, a],\ \left| g^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant \frac{|x|}{(n+2)(n+1)} \operatorname*{Max}_{t\in[-a,a]} |f^{(n+2)}(t)|$$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$

d) Achever l'exercice.

Q1. Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue et $x \to x$ est continue et non nulle. g est alors continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = g(0)$; ainsi g est continue en 0.

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. a) f et $u : x \to \dfrac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, par produit, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Leïbniz donne : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x)\, f^{(k)}(x)$.

Pour tout élément x de $\mathbb{N}^*$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $u''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $u'''(x) = -\dfrac{3!}{x^4}$.

Une récurrence simple montre alors que : $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ u^{(i)}(x) = \dfrac{(-1)^i\, i!}{x^{i+1}}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}\,(n-k)!}{x^{n-k+1}}\, f^{(k)}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!\,(-x)^k\, f^{(k)}(x)$. Or $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\dbinom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-x)^k f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Fixons x dans $[-a,0[\cup]0,a]$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre $n+1$ entre x et 0. Il vient :

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(0-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| \leqslant \frac{|0-x|^{n+2}}{(n+2)!} \max_{u\in[x,0]} |f^{(n+2)}(u)| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \max_{u\in[-a,a]} |f^{(n+2)}(u)|.$$ Comme $f(0)=0$:

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(0-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| = \left| -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right|.$$

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(0-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| = \left| \frac{(-x)^{n+1}}{n!} \right| \left| \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right|.$$

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(0-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \left| g^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Alors $\dfrac{|x|^{n+1}}{n!} \left| g^{(n)}(x) - \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \displaystyle\max_{u\in[-a,a]} |f^{(n+2)}(u)|$. En divisant par $\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}$ il vient :

$$\left| g^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant \frac{|x|}{(n+2)(n+1)} \max_{u\in[-a,a]} |f^{(n+2)}(u)|.$$

c) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{|x|}{(n+2)(n+1)} \max_{u\in[-a,a]} |f^{(n+2)}(u)| \right) = 0$, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{x\to 0} \left(g^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right) = 0 \quad (1).$$

Notons alors que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 et qu'ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \right) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0) \quad (2)$.

Par addition (1) et (2) donnent : $\displaystyle\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.

d) g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $g^{(n)}$ admet une limite finie en 0. Alors, l'une des conséquences du théorème de la limite de la dérivée, montre que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Étudier $f : x \to \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t}\,dt$.

À faire sans considération sur les intégrales généralisées.

- Notons que le domaine de définition de $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

φ est continue sur son domaine.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid [x, 2x] \subset]0,1[\text{ ou } [x,2x] \subset]1,+\infty[\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (0 < x \text{ et } 2x < 1) \text{ ou } x > 1\} =]0,\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[$

$\underline{D_f =]0,\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[.}$

- φ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. φ possède donc sur cet ensemble une primitive ϕ. ϕ est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

De plus $\forall x \in D_f$, $f(x) = \phi(2x) - \phi(x)$.

- $\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$, $2x \in]0,1[$
- $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- ϕ est dérivable sur $]0,1[$

Par composition $x \mapsto \phi(2x)$ est dérivable sur $]0,\frac{1}{2}[$

- $\forall x \in]1,+\infty[$, $2x \in]1,+\infty[$
- $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- ϕ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Par composition $x \mapsto \phi(2x)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Alors $x \mapsto \phi(2x)$ et ϕ sont dérivables sur D_f.

Ainsi par différence $\underline{f \text{ est dérivable sur } D_f}$.

De plus $\forall x \in D_f$, $f'(x) = 2\phi'(2x) - \phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{\ln x \ln 2x}(2\ln x - \ln 2x) = \frac{1}{\ln x \ln 2x}(2\ln x - \ln 2 - \ln x)$

$\underline{\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{1}{\ln x \ln 2x}(\ln x - \ln 2).}$

Notons que
- $\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$, $\ln x < 0$ et $\ln 2x < 0$ donc $\ln x \ln 2x > 0$
- $\forall x \in]1,+\infty[$, $\ln x > 0$ et $\ln 2x > 0$ donc $\ln x \ln 2x > 0$

Alors f' est du signe de $x \mapsto \ln x - \ln 2$.

f' est négative sur $]0,\frac{1}{2}[\,\cup\,]1,2]$ et positive sur $[2,+\infty[$.

f est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ $\underline{\underline{\text{et}}}^{*}$ $]1,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

* Ne pas écrire que f est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}[\,\cup\,]1,2]$ car c'est faux !!

- Etude de f aux bornes de son domaine.

$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est dérivable sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

$\forall t \in]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $\varphi'(t) = \frac{-1/t}{\ln^2 t}$.

$\forall t \in]0,1[$, $\varphi'(t) > 0$ et $\forall t \in]0,1[$, $\varphi'(t) < 0$.

φ est croissante sur $]0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$.

Soit $x \in]0,\frac{1}{2}[$. $[x,2x] \subset]0,1[$.

$\forall t \in [x,2x]$, $\varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2x)$. En intégrant il vient :

$(2x-x)\varphi(x) \leq f(x) \leq (2x-x)\varphi(2x)$ car $x \leq 2x$.

Alors $\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$, $\frac{x}{\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln 2x}$. $(*)$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left(x \times \frac{1}{\ln x}\right) = 0 \times 0 = 0$ et de même $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{x}{\ln 2x} = 0$.

Par encadrement $\underline{\underline{\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = 0}}$.

$\lim\limits_{x\mapsto 1/2^-}\left(\frac{x}{\ln 2x}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\mapsto 1/2^-} \ln 2x = 0^-$ alors $(*)$ donne : $\underline{\underline{\lim\limits_{x\mapsto \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty}}$

Soit $x \in]1,+\infty[$. $\forall t \in [x,2x]$, $\varphi(2x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$.

En intégrant il vient $x\varphi(2x) \leq f(x) \leq x\varphi(x)$ car $x \leq 2x$.

Alors $\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$. $(**)$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{\ln 2x} = +\infty$ par croissance comparée donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty}}$

$(**)$ donne encore $\forall x \in]1,+\infty[,\ \dfrac{1}{\ln 2x} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\ln x}$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln 2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.

<u>La courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $(x'x)$.</u>

Notons que $(**)$ ne permet pas de conclure en 1 !

$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t-1+1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{2x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \int_x^{2x} \frac{dt}{t\ln t}$.

"l'Astuce" qui consiste à cacher la pathologie de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ en 1 ou plutôt de la simplifier...

$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \Big[\ln|\ln t|\Big]_x^{2x} = \int_x^{2x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \ln|\ln 2x| - \ln|\ln x|$.

Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ \psi(t) = \begin{cases} \dfrac{t-1}{t\ln t} & \text{si } t \in]1,+\infty[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

ψ est continue sur $]1,+\infty[$. $\psi(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{t-1}{t(t-1)} = \dfrac{1}{t} \to 1$; $\lim\limits_{t\to1} \psi(t) = 1 = \psi(1)$ donc ψ est continue en 1. Ainsi ψ est continue sur $[1,+\infty[$ donc possède une primitive H sur $[1,+\infty[$. H est dérivable sur $[1,+\infty[$ donc continue sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = H(2x) - H(x) + \ln|\ln 2x| - \ln|\ln x|$.

$\lim\limits_{x\to1^+} (H(2x) - H(x)) = H(2) - H(1)$ (par continuité). $\lim\limits_{x\to1^+} \ln|\ln 2x| = \ln(\ln 2)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} (-\ln|\ln x|) = +\infty$. <u>Alors $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.</u>

x	0		$1/2$		1		2		
$f'(x)$	‖	$-$	‖	//////	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$0 \searrow -\infty$	‖	//////	‖	$+\infty \searrow$	$f(2)$	$\nearrow +\infty$	

<u>Remarque</u>.- $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1}{\ln 2x} - \dfrac{1}{\ln x}\right] = 0$. Alors f se prolonge à $[0,\frac{1}{2}[\ \cup\ ]1,+\infty[$ en une fonction de classe C^1 que je note $\hat{f}$.

Remarquons que $\hat{f}(0) = \lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ et $\hat{f}'(0) = \lim\limits_{x\to0} f'(x) = 0$.

Exercice 12 α est un réel strictement supérieur à 1.

Donner un équivalent de la suite de terme général $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Notons que la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ converge car $\alpha > 1$. $(R_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de ses restes ; $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ (ce qui n'intervient pas ici).

$t \mapsto t^\alpha$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

En intégrant on obtient $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(k+1)-1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{(k+1)-1}{k^\alpha}$ car $k \leqslant k+1$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![n, +\infty[\![$.

$\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p+1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{p} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$ ($\blacktriangle$).

Or $\displaystyle\int_n^p \frac{dt}{t^\alpha} = \int_n^p t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^p = \frac{1}{1-\alpha}\left[p^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right]$

OK ?!

$\alpha - 1 > 0$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_n^p \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Donc en faisant tendre p vers $+\infty$ dans ($\blacktriangle$) il vient $R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant R_{n-1}$

Ou encore $R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant R_n + \frac{1}{n^\alpha}$.

Alors $\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ ou $\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n} \leqslant n^{\alpha-1} R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$ donc par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n^{\alpha-1} R_n) = \frac{1}{\alpha-1}$.

Alors $n^{\alpha-1} R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}$ (car $\frac{1}{\alpha-1} \neq 0$). Ainsi $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

$$\underline{\underline{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}}}$$ pour tout réel α strictement supérieur à 1

Exercice 13 **Linéarité de l'intégrale.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout élément f de E on associe $\hat{f} = T(f)$ définie par :

$$\hat{f}(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \hat{f}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme injectif et non surjectif.

Q2. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,g'(x) = 0$.

Q1 • Soit $f \in E$. Notons que $\hat{f} \in E$. $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (!! qui prend la valeur 0 en 0) donc $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, par produit $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

En particulier $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\hat{f}(0) = f(0) = F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \hat{f}(0)$ donc $\hat{f}$ est continue en 0.

Finalement $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

T est une application de E dans E.

• Remarquons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t)+g(t))dt = \lambda \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$

$T(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f)+T(g))(0)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$. Ainsi $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$.

T est donc linéaire.

Finalement T est un endomorphisme de E.

Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$ et $f(0)=0$ car $T(f) = 0_E$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^x f(t)dt = 0$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)dt = 0$.

$x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est nulle sur $\mathbb{R}$ mais elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée égale à f. Alors $f = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$ et T est injectif.

Nous avons vu que si $f \in T$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
les éléments de $\operatorname{Im} T$ sont donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x-1|$. φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 1.

Alors $\varphi \in E$ et φ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donc $\varphi \in E \setminus \operatorname{Im} T$.

Par conséquent $\operatorname{Im} T$ est strictement contenue dans E. **T n'est pas surjectif.**

Q2 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments h de E tels que : $\begin{cases} h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et} \\ \lim\limits_{x \to 0} (x h'(x)) = 0 \end{cases}$

Notons que $\operatorname{Im} T = \mathcal{S}$.

- Soit $h \in \operatorname{Im} T$. $\exists f \in E$, $h = T(f)$. Notons que h est dans E et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ d'après Q1.

  $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. En dérivant il vient :

  $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) + x h'(x) = f(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x h'(x) = f(x) - h(x)$.

  f et h sont continues en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} (x h'(x)) = f(0) - h(0) = f(0) - T(f)(0) = f(0) - f(0) = 0$.

  Alors $T(f) = h \in \mathcal{S}$. Ainsi $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{S}$.

- Soit $h \in \mathcal{S}$. Notons que $h \in \operatorname{Im} T$ c'est à dire que : $\exists f \in E$, $T(f) = h$.

→ Une petite analyse s'impose. Supposons que $f \in E$ et $T(f) = h$.

  $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x h(x) = x T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

  $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En dérivant l'égalité précédente il vient :

  $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) + x h'(x) = f(x)$. De plus $f(0) = T(f)(0) = h(0)$

  Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} h(x) + x h'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Remarque .. ceci montre l'unicité d'un antécédent de par T dans E...
mais pas l'existence. Pas de cadeau !

Posons maintenant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} h(x) + x h'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons alors que $f \in E$ et que $T(f) = h$.

h et h' sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x$ aussi. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x \to 0} (h(x) + x h'(x)) \underset{h \in \mathcal{F}}{=} h(0) + 0 = h(0) = f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$. f appartient à E.

- $T(f)(0) = f(0) = h(0)$
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Supposons $x > 0$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\int_\varepsilon^x f(t)\,dt = \int_\varepsilon^x (h(t) + t h'(t))\,dt = [t h(t)]_\varepsilon^x = x h(x) - \varepsilon h(\varepsilon)$.

Alors $\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^x f(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (x h(x) - \varepsilon h(\varepsilon)) = x h(x) - 0 \times h(0) = x h(x)$

Donc $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x} x h(x) = h(x)$.

On montre de la même manière que ceci vaut pour $x < 0$.

Ceci achève de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = h(x)$. Alors $T(f) = h$.

Par conséquent $h \in \operatorname{Im} T$

Finalement $\underline{\underline{\mathcal{F} \subset \operatorname{Im} T.}}$

Par conséquent $\underline{\underline{\operatorname{Im} T = \mathcal{F}.}}$

$\underline{\underline{\operatorname{Im} T \text{ est l'ensemble des éléments } h \text{ de } E \text{ tels que :}}}$ $\begin{cases} h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \\ \lim\limits_{x \to 0} (x h(x)) = 0 \end{cases}$

Exercice 14 Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \, dt$.

Q1 Calculer I_0 et I_1.

Q2 Montrer que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q3 Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Q4 Pour tout p dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_p = (-1)^p I_{2p}$. Calculer $v_{k+1} - v_k$ pour k dans $\mathbb{N}$ et en déduire v_p (à l'aide d'une somme) pour p dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer alors que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Q5 En utlisant $w_p = (-1)^p I_{2p+1}$, montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

Q1 $I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 \, dt = \frac{\pi}{4}$. $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int_0^{\pi/4} \left(-\frac{\cos' t}{\cos t}\right) dt = \left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1$.

$I_1 = \ln\frac{2}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$. $\quad$ $I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Q2 Rappelons que $\tan' = 1 + \tan^2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)(\tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} \tan' t \, (\tan t)^n dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

Q3 V1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $(\tan t)^n \geqslant 0$ et $0 \leqslant \frac{\pi}{4}$ donc $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \geqslant 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \underset{\text{car } I_{n+2} \geqslant 0}{\leqslant} I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Le théorème d'encadrement montre que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

V2 Etape 1. On montre comme dans V1 que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

Etape 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $(\tan t - 1)(\tan t)^n \leqslant 0$ et $0 \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Alors $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t - 1)(\tan t)^n dt \leqslant 0$; $I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

Etape 3. $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée donc convergente. Notons ℓ sa limite

$\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} J_{n+2}$. Alors $2\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} (J_{n+2}+J_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$. Ainsi $\ell = 0$.

$(J_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

(Q4) $\forall k\in\mathbb{N},\ v_{k+1}-v_k = (-1)^{k+1} I_{2k+2} - (-1)^k I_{2k} = (-1)^{k+1}\left[I_{2k+2}+I_{2k}\right] = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ v_{k+1}-v_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ v_p = \sum\limits_{k=0}^{p-1}(v_{k+1}-v_k)+v_0 = \sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4}$. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ v_p = \frac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad I_{2p} \overset{I_{2p}\geq 0}{=} |(-1)^p I_{2p}| = |v_p| = \left|\frac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p} = 0$.

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ ... et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ ou $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

(Q5) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $w_p = \sum\limits_{k=0}^{p-1}(w_{k+1}-w_k)+w_0 = \sum\limits_{k=0}^{p-1}\left[(-1)^{k+1}I_{2k+3} - (-1)^k I_{2k+1}\right] + I_1$.

$(-1)^p I_{2p+1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+1}\left[I_{2k+3}+I_{2k+1}\right] + I_1 = \sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+2} + I_1 = \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{2k} + \frac{1}{2}\ln 2$.

$(-1)^p I_{2p+1} = \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$; $\left|\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = |2(-1)^p I_{2p+1}| \underset{I_{2p+1}\geq 0}{=} 2 I_{2p+1}$.

Or $\lim\limits_{p\to+\infty}(2I_{2p+1}) = 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

1°) la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

2°) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ ou $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$ ... bien connu.

Exercice 15 ESCP 98 On pose $D =]0,+\infty[$ et $\forall x \in D,\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Justifier la définition de F.

Q2. Etudier le sens de variation de F.

Q3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et vérifier que :

$$\forall x \in D,\ F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$$

Q4. Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$.

Q5. Déterminer les limites de F aux bornes de son domaine.

Q6. **Facultatif** Trouver un équivalent de F en 0.

Q1 Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ et $t \mapsto e^t$ sont continues sur $[0,1]$ donc, par produit, $t \mapsto \frac{e^t}{t+x}$ est continue sur $[0,1]$. Ainsi $\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt$ existe. Ceci justifie la définition de F.

Q2 Soient x et y deux éléments de $]0,+\infty[$ tels que : $x \leq y$.

$\forall t \in [0,1],\ 0 < t+x \leq t+y$.

Alors $\forall t \in [0,1],\ 0 < \frac{1}{t+y} \leq \frac{1}{t+x}$ et $e^t \geq 0$.

Donc $\forall t \in [0,1],\ \frac{e^t}{t+y} \leq \frac{e^t}{t+x}$. Comme $0 \leq 1$ (!) : $F(y) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+y}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt = F(x)$.

$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ x \leq y \Rightarrow F(y) \leq F(x)$. F est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q3 Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $t \mapsto t+x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ ce qui justifie le changement de variable $u = t+x$ dans ce qui suit.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt \underset{u=t+x}{=} \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u}\,du = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du.$$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du.$$

Soit G une primitive de $g : u \mapsto \frac{e^u}{u}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\quad F(x) = e^{-x}\left[G(x+1) - G(x)\right].$

G est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ x+1 \in \mathbb{R}^*_+$.

Alors $x \mapsto G(x+1)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Ainsi $x \mapsto G(x+1)-G(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. $x \mapsto e^{-x}$ également.

Alors par produit F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = -e^{-x}[G(x+1)-G(x)] + e^{-x}(g(x+1)-g(x)) = -F(x) + e^{-x}\left[\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^{x}}{x}\right]$

$\forall x \in]0,+\infty[,\quad F'(x) = -F(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$

$\underline{\underline{\forall x \in]0,+\infty[,\quad F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.}}$

Q4 Soit $x \in]0,+\infty[$. Une intégration par parties simple donne :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt = \left[e^t \frac{1}{t+x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\left(-\frac{1}{(t+x)^2}\right)dt = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt$$

$$xF(x) = e\,\frac{x}{x+1} - 1 + x\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt.$$

Notons que $\lim_{x\to+\infty}\left(e\,\frac{x}{x+1} - 1\right) = e-1$ et montrons que $\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt\right) = 0$

$\forall t \in [0,1],\ 0 \le e^t \le e$ et $0 \le \frac{1}{(t+x)^2} \le \frac{1}{x^2}$.

Alors $\forall t \in [0,1],\ 0 \le \frac{e^t}{(t+x)^2} \le \frac{e}{x^2}$. En intégrant et en multipliant par x il vient :

$$0 \le x\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt \le x\int_0^1 \frac{e}{x^2}\,dt = \frac{e}{x}.$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$. Alors par encadrement : $\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt\right) = 0$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}(xF(x)) = e-1$ et $e-1 \neq 0$. $xF(x) \underset{+\infty}{\sim} e-1$.

Donc $\underline{\underline{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.}}$

Q5 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e-1}{x} = 0$. $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

<u>Remarque</u>.. On peut retrouver ce résultat en notant que $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 e^t\,dt$

Soit $x\in\,]0,+\infty[$. $\forall t\in[0,1]$, $\frac{e^t}{t+x} \geq \frac{1}{t+x}$ car $0 \leq t$

En intégrant on obtient $F(x) \geq \int_0^1 \frac{dt}{t+x} = [\ln|t+x|]_0^1 = \ln(1+x) - \ln x$.

Or $\lim (\ln(1+x) - \ln x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = +\infty$.

Q6 Rappelons que $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $F(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$.

Alors $F(x) \underset{0}{\sim} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du = \int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du + \int_x^{x+1} \frac{du}{u} = \int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du + \ln(x+1) - \ln x$.

$\varphi : u \mapsto \frac{e^u-1}{u}$ se prolonge en une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$. Soit ϕ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \left(\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du\right) = \lim\limits_{x\to 0} (\phi(x+1) - \phi(x)) = \phi(1) - \phi(0)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \left(\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du + \ln(x+1)\right) = \phi(1) - \phi(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln x) = +\infty$.

Alors $\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du + \ln(x+1) \underset{x\to 0}{=} o(-\ln x)$.

Donc $F(x) \underset{0}{\sim} \int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,du + \ln(x+1) - \ln x \underset{0}{\sim} -\ln x$.

$\underline{F(x) \underset{0}{\sim} -\ln x}$.