Exercice 1 ESCP 96 E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

f est un élément de E. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $I_n(f)$ converge ver 0.

Q2. a) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\,dt$$

En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et écrire sa somme sous forme intégrale.

b) Qu'obtient-on si : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$?

c) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en posant : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$

Q3. Ici on s'intéresse à la convergence de la suite de terme général $nI_n(f)$.

a) Soit α un élément de $]0,1[$. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{\alpha} t^n f(t)\,dt = 0$.

b) Ici $f(1) = 0$. On se donne un réel ε strictement positif. Montrer que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que :

$$\left| n \int_{\alpha}^{1} t^n f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n(f)$

c) Etudier le cas général en se ramenant au cas particulier précédent.

Q4. Ici $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}$.

Calculer $I_n(f)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$. Trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Q1 $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc $|f|$ possède un maximum M sur $[0,1]$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ |t^n f(t)| \le M t^n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |I_n(f)| = \left|\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |t^n f(t)|\,dt \le \int_0^1 M t^n\,dt = \frac{M}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.

<u>La suite de terme général $(I_n(f))_{n\geq 0}$ converge vers 0.</u>

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k\right) f(t)\,dt$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\,dt$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t}\,dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) - \int_0^1 \frac{1}{1+t} f(t) \right| = \left| \int_0^1 \frac{t f(t)}{1+t} t^n \, dt \right|$

$t \mapsto \frac{t f(t)}{1+t}$ étant continue sur $[0,1]$, Q1 permet sans doute d'affirmer que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t f(t)}{1+t} t^n \, dt = 0$. Ceci suffit pour obtenir :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) - \int_0^1 \frac{1}{1+t} f(t) \, dt \right| = 0$; ceci donne encore :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} f(t) \, dt$

Ainsi la série de terme général $(-1)^k I_k(f)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} \, dt$

---

b) Ici $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$. f est continue sur $[0,1]$; $f \in E$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^k f(t) \, dt = \frac{1}{k+1}$ et $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} \, dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$ (ou $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$)

---

c) Pour $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sqrt{x}$; f est continue sur $[0,1]$ donc $f \in E$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^k f(t) \, dt = \int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}} \, dt = \left[\frac{t^{k+\frac{3}{2}}}{k+3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{k+\frac{3}{2}} = \frac{2}{2k+3}$.

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} \, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} \, dt \underset{\substack{u=\sqrt{t} \\ t=u^2,\ dt=2u\,du}}{=} \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} \times 2u \, du = 2 \int_0^1 \frac{u^2+1-1}{1+u^2} \, du$$

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} \, dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du = 2 \left[u - \operatorname{Arctan} u \right]_0^1 = 2 - 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi la série de terme général $\frac{2(-1)^k}{2k+3}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+3} = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Alors $\dfrac{\pi}{2} - 2 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{\ell+1}}{2\ell+3} \underset{\ell \to \ell-1}{=} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{\ell}}{2\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{\ell}}{2\ell+1} - 2.$

Alors $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{\ell}}{2\ell+1}$; $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1} = \frac{\pi}{4}.$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1} = \frac{\pi}{4}.$

Q3 a) $M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right| \leq n\int_0^\alpha t^n |f(t)|\,dt \leq nM\int_0^\alpha t^n\,dt = \frac{nM}{n+1}\,\alpha^{n+1}.$$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{nM}{n+1} = M$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$ ($\alpha \in]0,1[$) ; ainsi, par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\left(n\displaystyle\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right) = 0.$

b) f est continue en 1 et $f(1)=0$.

$\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta' \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in[0,1],\ |t-1|<\eta' \Rightarrow |f(t)|<\varepsilon'$. Soit $\alpha \in]0,1[$.

Notons encore que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|n\displaystyle\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \leq n\int_\alpha^1 t^n|f(t)|\,dt \leq n \max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)| \int_\alpha^1 t^n\,dt$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|n\displaystyle\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \leq n\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = \frac{n}{n+1}\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|\,(1-\alpha^{n+1}) \leq \max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|$

$\frac{n}{n+1} \leq 1$ et $1-\alpha^{n+1} \leq 1$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|n\displaystyle\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \leq \max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|$ … ceci pour tout $\alpha\in]0,1[$.

Fixons alors ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\exists \eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in[0,1],\ |t-1|<\eta \Rightarrow |f(t)|<\varepsilon/2$

$\exists \eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in[0,1],\ 1-\eta<t<1+\eta \Rightarrow |f(t)|<\varepsilon/2$

Choisissons UN réel α appartenant à $]1-\eta,1+\eta[\ \cap\ ]0,1[$.

Ainsi $\alpha\in]0,1[$ et $\forall t\in[\alpha,1],\ |f(t)|<\varepsilon/2$.

Alors $\alpha\in]0,1[$ et $\max_{t\in[\alpha,1]}|f(t)| < \varepsilon/2$. $\alpha\in]0,1[$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|n\displaystyle\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| = \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt + n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right| + \left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| < \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous avons montré que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right) = 0$; ainsi :

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right| < \varepsilon/2$

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow \left|n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Ainsi $\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow \left|n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| < \varepsilon.}$

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right) = 0.}$ $\quad \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\, I_n(f)\right) = 0.}$

$\underline{c)}$ Si $f \in E$ et par plus. Posons $g = f - f(1)$. $g \in E$ et $g(1) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\, I_n(g)\right) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $n I_n(g) = n\int_0^1 (f(t) - f(1))t^n\,dt = n I_n(f) - n f(1)\int_0^1 t^n\,dt = n I_n(f) - \frac{n}{n+1} f(1).$

Alors $n I_n(f) = n I_n(g) + \frac{n}{n+1} f(1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n I_n(f)\right) = 0 + 1 \times f(1) = f(1).$

Finalement : $\underline{\forall f \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\, I_n(f)\right) = f(1).}$

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n(f) = \int_0^1 \underset{u}{t^n}\,\underset{v'}{e^{-t}}\,dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 n t^{n-1}(-e^{-t})\,dt = -e^{-1} + n I_{n-1}(f).$$

$$\frac{I_n(f)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{I_{n-1}(f)}{(n-1)!}. \qquad \frac{I_n(f)}{n!} - \frac{I_{n-1}(f)}{(n-1)!} = -\frac{e^{-1}}{n!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle \frac{I_n(f)}{n!} - \frac{I_0(f)}{0!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{I_k(f)}{k!} - \frac{I_{k-1}(f)}{(k-1)!}\right) = -\sum_{k=1}^n \frac{e^{-1}}{k!}$

$J_n(f) = n!\left[I_0(f) - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}\right]$. $J_0(f) = \int_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1}+1$.

$J_n(f) = n!\left[-e^{-1}+1-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\right] = n!\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}+1\right]$.

$J_n(f) = n!\left[1-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\right]$. Notons que ceci vaut aussi pour $n=0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n(f) = n!\left[1-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\right]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $e J_n(f) = n!\left[e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right] = n!\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right]$.

Alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{e J_n(f)}{n!} = \frac{e\, n J_n(f)}{n\, n!}$.

$\lim_{n\to+\infty}(n J_n(f)) = f(1) = e^{-1}$; ainsi $n J_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$ $(e^{-1}\in\mathbb{R}_+^*)$

Alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \sim \frac{e\times e^{-1}}{n\, n!} \sim \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \sim \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice d'ORAL ESCP 96 ... préparation 30'...

Exercice 17 Q1. Montrer que : $\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ |\ln^2(1+t) - \ln^2(1+s)| \leqslant 2|t-s|$.

Dans la suite de cet exercice, g est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1.

Q2. On pose pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln^2\left(1+\frac{k+t}{n}\right) - \ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt = 0$. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 g(n\,t)\ln^2(1+t)\,dt\right)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite en fonction de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$.

Q1 Posons $\forall x \in [0,1],\ \varphi(x) = \ln^2(1+x)$.

φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = 2 \times \dfrac{1}{1+x} \times \ln(1+x)$.

Rappelons que $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln y \leqslant y-1$ donc $\forall u \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+u) \leqslant u$.

Ainsi $\forall x \in [0,1],\ |\varphi'(x)| = \left|\dfrac{2}{1+x}\ln(1+x)\right| = \dfrac{2}{1+x}\ln(1+x) \leqslant \dfrac{2}{1+x}x = 2 - \dfrac{2}{1+x} \leqslant 2$.

φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ |\varphi'(x)| \leqslant 2$.

L'inégalité des accroissements finis montre alors que :

$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ |\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant 2|t-s|$.

Ainsi $\underline{\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ |\ln^2(1+t) - \ln^2(1+s)| \leqslant 2\,|t-s|}$.

Q2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $[0,1]$. $\dfrac{k+t}{n} \in [0,1]$ et $\dfrac{k}{n} \in [0,1]$ si $k \in [\![0,n-1]\!]$.

$|u_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\ln^2\left(1+\frac{k+t}{n}\right) - \ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2\left|\frac{k+t}{n} - \frac{k}{n}\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2t}{n}$

$|u_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n} \times n \times \dfrac{2t}{n} = \dfrac{2t}{n}$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ |u_n(t)| \leqslant \dfrac{2t}{n}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left|\displaystyle\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |u_n(t)|\,|g(t)|\,dt \leqslant \frac{2}{n}\int_0^1 t\,|g(t)|\,dt$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\int_0^1 t\,|g(t)|\,dt = 0$. Par encadrement il vient alors :

$\underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt = 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $I_n = \int_0^1 g(nt)\, h^2(1+t)\, dt$. Effectuons le changement de variable $u = nt$ dans I_n. Il vient $I_n = \int_0^n g(u)\, h^2\left(1+\frac{u}{n}\right)\frac{1}{n}\, du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(u)\, h^2\left(1+\frac{u}{n}\right) \times \frac{1}{n}\, du$.

Le changement de variable $v = u - k$ donne :

Passage le moins évident de l'exercice.

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(v+k)\, h^2\left(1+\frac{v+k}{n}\right) dv$$

Ainsi $I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(v)\, h^2\left(1+\frac{v+k}{n}\right) dv$ car g est périodique de période 1.

Autrement $I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(t)\, h^2\left(1+\frac{t+k}{n}\right) dt$! Posons $J_n = \int_0^1 u_n(t)\, g(t)\, dt$.

Notons que $J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(h^2\left(1+\frac{t+k}{n}\right) - h^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) g(t)\, dt$

Alors $I_n = J_n + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 h^2\left(1+\frac{k}{n}\right) g(t)\, dt \overset{\text{ok ?!}}{=} J_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$!

Rappelons que $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = h^2(1+t)$.

φ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h^2\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h^2(1+t)\, dt$.

Rappelons que $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^1 h^2(1+t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt$.

Finalement $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 g(nt)\, h^2(1+t)\, dt\right) = \int_0^1 h^2(1+t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt$.

Exercice 1'.- Calculer $\int_0^1 h^2(1+t)\, dt$

Exercice 1''.- Montrer que le résultat vaut encore si l'on remplace $t \mapsto h^2(1+t)$ par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Exercice 18 **Intégrale de Gauss Attention "nouveau" texte**

On se propose de montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$!!

Q1 a) Montrer que la fonction $F:\ x \to \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $G:\ x \to \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$ par $\dfrac{1}{e}$ (remarquer que $t \leqslant t^2$ si...).

En déduire que F est majorée sur $[1,+\infty[$ et même sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que F admet une limite finie L en $+\infty$ (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

Nous allons montrer que $L = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Q2 $u:\ x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$. Soit x dans $\mathbb{R}$; on se propose de montrer que u est dérivable en x.

a) Montrer que pour s dans [-2,2], $|e^s - 1 - s| \leqslant \dfrac{s^2}{2}\,e^2$.

b) h est un réel non nul de l'intervalle $[-1,1]$. On pose :

$$\Delta(h) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \Big(-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\Big).$$

Montrer que $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{|h|}{2}e^2 \displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)\,dt$.

En déduire que u est dérivable en x et que $u'(x) = \displaystyle\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\,dt$

Q3 Calculer $u(0)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (on pourra encadrer $1+t^2$).

Q4 $v:\ x \to u(x^2)$ et $w:\ x \to \Big(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2$

a) Montrer que $v+w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En utilisant un changement de variable montrer que cette dérivée est nulle.

b) En déduire que : $v(x) + w(x) = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout réel x.

c) Montrer que : $L = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

d) Déduire du résultat précédent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Q1 a) Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$.

F est la primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0.

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=e^{-x^2}>0$.

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x un élément de $[1,+\infty[$.

$\forall t\in[1,x]$, $t\leq t^2$; $\forall t\in[1,x]$, $e^{-t^2}\leq e^{-t}$.

Alors $G(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt \underset{1\leq x}{\leq} \int_1^x e^{-t}dt=[-e^{-t}]_1^x=\frac{1}{e}-e^{-x}\leq\frac{1}{e}$.

$\forall x\in[1,+\infty[$, $G(x)\leq\frac{1}{e}$. G est majorée par $\frac{1}{e}$ sur $[1,+\infty[$.

$\forall x\in[1,+\infty[$, $F(x)=\int_0^1 e^{-t^2}dt+\int_1^x e^{-t^2}dt=F(1)+G(x)\leq F(1)+\frac{1}{e}$.

F est majorée par $F(1)+\frac{1}{e}$ sur $[1,+\infty[$.

F étant croissante sur $\mathbb{R}$, F est encore majorée par $F(1)+\frac{1}{e}$ sur $[0,+\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$.

c) 1°.. F est croissante sur $[1,+\infty[$

2°.. F est majorée sur $[1,+\infty[$

Le théorème de la limite monotone montre alors que F a dont une limite finie L en $+\infty$.

Q2 a) $\varphi: t\mapsto e^t$ est de classe C^2 sur $[-2,2]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$$\forall s\in[-2,2],\ |\varphi(s)-\varphi(0)-(s-0)\varphi'(0)|\leq\frac{|s-0|^2}{2!}\max_{u\in\overleftrightarrow{[0,s]}}|\varphi''(u)|.$$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi''(t)=\varphi'(t)=\varphi(t)=e^t$. Alors :

$$\forall s\in[-2,2],\ |e^s-1-s|\leq\frac{s^2}{2}\max_{u\in\overleftrightarrow{[0,s]}}e^u$$

Notons que $\forall s \in [-2,2]$, $\max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{0,s}]} e^t \leq \max\limits_{t\in[-2,2]} e^t = e^2$. Ce qui donne donc :

$[\overleftrightarrow{0,s}] \subset [-2,2]$

$\forall s \in [-2,2],\ |e^s - 1 - s| \leq \dfrac{s^2}{2}e^2.$

b) $$\Delta(h) = \frac{1}{h}\left[\int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt + h\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right].$$

$$\Delta(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left[e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right]dt.$$

$$|\Delta(h)| \leq \frac{1}{|h|}\int_0^1\left(\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right|\left|e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right|\right)dt.$$

Soit $t\in[0,1]$. $|-h(1+t^2)| = |h|(1+t^2) \leq 2|h| \leq 2$ car $h \in [-1,1]-\{0\}$.

Ainsi $\forall t\in[0,1]$, $-h(1+t^2) \in [-2,2]$ donc $\forall t \in [0,1]$, $\left|e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leq \dfrac{h^2(1+t^2)^2}{2}e^2$ d'après a).

$h^2 = |h|^2$!

$0\leq 1$!

Alors $$|\Delta(h)| \leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\cdot h^2\frac{(1+t^2)^2}{2}e^2 dt = \frac{|h|}{2}e^2\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt.$$

$$\forall h \in [-1,1]-\{0\},\ |\Delta(h)| = \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \left(-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right)\right| \leq \frac{|h|}{2}e^2\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt.$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{|h|}{2}e^2\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt\right] = 0$, le théorème d'encadrement donne :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$. Ainsi u est dérivable en x et $u'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

Morale « $\dfrac{d}{dx}\left[x\mapsto\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt\right] = \left[x\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right)dt\right]$ » !! ok ?

(Q3) $u(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. $u(0) = \frac{\pi}{4}$.

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $\forall t \in [0,1], 1+t^2 \geq 1$ et $-x \leq 0$; $\forall t \in [0,1], -x(1+t^2) \leq -x$

$\forall t \in [0,1], 0 \leq e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x}$ et $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x} \frac{1}{1+t^2}$. En intégrant $(0 \leq 1)$ il vient :

$0 \leq u(x) \leq e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = e^{-x} u(0) = e^{-x} \frac{\pi}{4}$. Or $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \frac{\pi}{4}\right) = 0$ donc

par encadrement il vient : $\underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0}}$.

(Q4) a) $x \mapsto x^2$ et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$; par composition $v : x \mapsto u(x^2)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous avons vu dans Q1 que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée f.

Alors $w = F^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme $\underline{v + w \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(v+w)'(x) = v'(x) + w'(x) = 2x\, u'(x^2) + 2 f(x) F(x)$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ (v+w)'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto tx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cela justifie le changement de variable $u = tx$ suivant.

$$x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = \int_0^1 e^{-x^2} e^{-(xt)^2} x\, dt \overset{u=xt}{=} \int_0^x e^{-x^2} e^{-u^2} du = e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Alors $(v+w)'(x) = -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du + 2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ (v+w)'(x) = 0}}$.

b) $v+w$ est dérivable et de dérivée nulle sur l'INTERVALLE $\mathbb{R}$ alors $v+w$ est constante sur $\mathbb{R}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (v+w)(x) = \lambda$.

En particulier $\lambda = v(0)+w(0) = u(0^2) + (F(0))^2 = u(0)+0^2 = u(0) = \frac{\pi}{4}$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ v(x)+w(x) = \frac{\pi}{4}}}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x))^2 = L^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = L^2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x^2) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (v(x)+w(x)) = L^2$ or $\forall x \in \mathbb{R}, v(x)+w(x) = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $L^2 = \frac{\pi}{4}$. $|L| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-t^2} \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient $L \geq 0$. Ainsi $L = |L| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\underline{\underline{L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}$ ou $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}$ ou $\underline{\underline{\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

d) $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Cela justifie le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \overset{u = t/\sqrt{2}}{=} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, F(x/\sqrt{2}).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{2}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}}$.

Par parité $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ converge et vaut } \sqrt{2\pi}}}$.

Exercice 19.- f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\int_0^1 \left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)dx\right]$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_n = n\left[\int_0^1 \left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)dx\right]$

$$\alpha_n = n\int_0^1 f(x+\tfrac{1}{n}) - n\int_0^1 f(x)dx \underset{u=x+\frac{1}{n}}{=} n\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(u)du - n\int_0^1 f(x)dx = \underbrace{n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(u)du}_{\beta_n} - \underbrace{n\int_0^{\frac{1}{n}} f(u)du}_{\gamma_n}$$

Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = f(1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = f(0)$

Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. F est dérivable sur $[0,1]$ et $F'=f$.

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(h)-F(0)}{h} = F'(0) = f(0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(1+h)-F(1)}{h} = F'(1) = f(1)$.

En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F(\frac{1}{n})-F(0)}{\frac{1}{n}} = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F(1+\frac{1}{n})-F(1)}{\frac{1}{n}} = f(1)$

ceci s'écrit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt\right) = f(1)$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = f(1)$. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\left[\int_0^1 \left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)dx\right]\right) = f(1)-f(0).$$

Exercice 20.- f est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ T-périodique ($T>0$)

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.

Soit x un réel de l'intervalle $[T,+\infty[$. Posons $n = E(\frac{x}{T})$.

Alors $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\leq \frac{x}{T} < n+1$; $n\in\mathbb{N}^*$ et $nT\leq x < nT+T$.

Notons que n dépend de x !

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{2T} f(t)dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{nT}^{x} f(t)dt$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(u+kT)du + \int_0^{x-nT} f(u+nT)du \quad \text{(changement de variable simples)}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(u)du + \int_0^{x-nT} f(u)du = n\int_0^T f(u)du + \int_0^{x-nT} f(u)du \quad \text{(f est T périodique)}$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{n}{x}\int_0^T f(u)du + \frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} f(u)du = \frac{1}{x}E(\tfrac{x}{T})\int_0^T f(u)du + \frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} f(u)du$$

$$E(y) \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} y \ ; \quad \frac{1}{x}E(\tfrac{x}{T}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\times\frac{x}{T} = \frac{1}{T} \ ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x}E(\tfrac{x}{T})\right) = \frac{1}{T}.$$

Car il ne reste plus qu'à prouver que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} f(u)\,du = 0.$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} f(u)du\right| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} |f(u)|du \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{x}\int_0^T |f(u)|du$$

$x-TE(\frac{x}{T}) \geq 0$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x-TE(\frac{x}{T}) \leq T \\ |f| \geq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} E(\frac{x}{T}) \leq \frac{x}{T} < E(\frac{x}{T})+1 \\ TE(\frac{x}{T}) \leq x < TE(\frac{x}{T})+T \end{cases}$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x-TE(\frac{x}{T})} f(u)du = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^T |f(u)|du\right) = 0.$$

Finalement $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)du.$

---

deux exercices de contrôle.

<u>**ex 1**</u>.. f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt$

<u>**ex 2**</u>.. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 1-périodique

montrer que pour a dans $\mathbb{R}$ $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\int_0^a f(nt)dt = a\int_0^1 f(t)dt$!

Exercice 11 Q1. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ \sin\frac{k}{n}$.

Q2 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin x-x|\leqslant\dfrac{|x|^3}{6}\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\ \sin\frac{k}{n}\cdot$

Q1.. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$.

Posons encore $\forall t\in[0,1]$, $f(t)=t\sin t$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Comme f est continue sur $[0,1]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(t)\,dt$. Une intégration par parties simple donne : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 t\sin t\,dt=\big[-t\cos t\big]_0^1+\int_0^1\cos t\,dt=-\cos 1+\big[\sin t\big]_0^1=\sin 1-\cos 1$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}=\sin 1-\cos 1$.

Q2 Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\sin x$. φ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 2 donne : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)\right|\leqslant\frac{|x|^3}{3!}\max_{u\in[0,x]}|\varphi'''(u)|$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\cos x$, $\varphi''(x)=-\sin x$ et $\varphi'''(x)=-\cos x$.

Alors $\displaystyle\left|\sin x-0-x-\frac{x^2}{2!}\times 0\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\max_{u\in[0,x]}|-\cos u|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\times 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x-x|\leqslant\dfrac{|x|^3}{6}$. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$|v_n-u_n|=\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\left(\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{k}{n}\right|\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}1\times\frac{(k/n^2)^3}{6}$

$|v_n-u_n|\leqslant\displaystyle\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{6n^6}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{24}\,\frac{n^2(n+1)^2}{n^6}=\frac{1}{24}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{n^2}\cdot$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{24}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}\right)=0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\big((v_n-u_n)+u_n\big)=0+\sin 1-\cos 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}=\sin 1-\cos 1$.

Exercice 11 **ESCP 2008 1.5** Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$.

Pour tout nombre réel $x > 0$ on définit : $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q1. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $f(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

b) Montrer que la fonction f est croissante.

c) Montrer que f admet une limite lorsque x tend vers 0^+ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Q2. a) Montrer que, pour tout réel k strictement supérieur à 1, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, on a : $t \leqslant e^t - 1 \leqslant kt$.

b) En déduire la limite de f en 0^+.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque x tend vers 0^+. Calculer cette limite.

b) Retrouver le résultat de la question 2. b) à l'aide de la question précédente.

Q1. a) Par convexité $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t - 1 \geqslant t$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{e^t - 1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{t}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $bx \geqslant ax$ donc $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^t-1}{t^2}\,dt \geqslant \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \big[\ln|t|\big]_{ax}^{bx}$

$f(x) \geqslant \ln|bx| - \ln|ax| = \ln\dfrac{|bx|}{|ax|} = \ln\dfrac{|b|}{|a|} = \ln\dfrac{b}{a}$.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geqslant \ln\dfrac{b}{a}}$.

b) $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit G une primitive de cette fonction sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = G(bx) - G(ax)$

G est dérivable sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto bx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $bx \in]0,+\infty[$

par composition $x \mapsto G(bx)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

De même $x \mapsto G(ax)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Par différence f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = b\,G'(bx) - a\,G'(ax) = \dfrac{e^{bx}-1}{bx^2} - \dfrac{e^{ax}-1}{ax^2}$

f' est du signe de $x \mapsto \dfrac{e^{bx}-1}{b} - \dfrac{e^{ax}-1}{a}$ sur $]0,+\infty[$.

f' est encore du signe de $\varphi : x \mapsto \dfrac{e^{bx}-1}{bx} - \dfrac{e^{ax}-1}{ax}$.

Posons $\forall u \in]0,+\infty[$, $\psi(u) = \frac{e^u - 1}{u}$.

ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $\psi'(u) = \frac{ue^u - (e^u - 1)}{u^2} = \frac{ue^u - e^u + 1}{u^2} = \frac{e^u}{u^2}\left[u - 1 + e^{-u}\right]$

$\forall z \in \mathbb{R}$, $e^z \geq z+1$; $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^{-u} \geq -u+1$; $\forall u \in \mathbb{R}$, $u - 1 + e^{-u} \geq 0$

donc $\forall u \in]0,+\infty[$, $\psi'(u) \geq 0$. ψ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. $ax \leq bx$ donc $\psi(ax) \leq \psi(bx)$

Alors $\varphi(x) = \psi(bx) - \psi(ax) \geq 0$. D'où

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$. Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$.

<u>f est croissante sur $]0,+\infty[$.</u>

c) f est croissante sur $]0,+\infty[$ et minorée par $\ln\frac{b}{a}$. Le théorème de la limite monotone montre que <u>f admet une limite finie en 0.</u>

Q2 a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq t+1$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t - 1 \geq t$.

$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]0,\varepsilon]$, $\left|\frac{e^t - 1}{t} - 1\right| < \alpha$

Soit k un élément de $]1,+\infty[$. Posons $\alpha = k-1$. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in]0,\varepsilon]$, $\left|\frac{e^t - 1}{t} - 1\right| < \alpha = 1-k$.

donc $\forall t \in]0,\varepsilon]$ $\frac{e^t - 1}{t} - 1 \leq \left|\frac{e^t - 1}{t} - 1\right| < \alpha = k-1$.

$\forall t \in]0,\varepsilon]$, $\frac{e^t - 1}{t} < k$. Alors $\forall t \in]0,\varepsilon]$, $e^t - 1 < kt$.

Nécessairement $\forall t \in [0,\varepsilon]$ $e^t - 1 \leq kt$, ce qui vaut aussi pour $t = 0$.

Ainsi $\forall k \in]1,+\infty[$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,\varepsilon]$, $t \leq e^t - 1 \leq kt$

Soit $x \in]0,\frac{\varepsilon}{b}]$. $bx \in]0,\varepsilon]$. Or $ax \leq bx$ donc $ax \in]0,\varepsilon]$.

Alors $\forall t \in [ax,bx]$, $t \leq e^t - 1 \leq kt$

$\forall t \in [ax,bx]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{e^t - 1}{t^2} \leq \frac{k}{t}$. Alors, comme $ax \leq bx$: $\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leq f(x) \leq k\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t}$

Ainsi $\forall x \in \left]0, \frac{\varepsilon}{b}\right]$, $\ln \frac{b}{a} \leq f(x) \leq k \ln \frac{b}{a}$.

En faisant tendre x vers 0 il vient $\ln \frac{b}{a} \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x) \leq k \ln \frac{b}{a}$.

Or ceci vaut pour tout k dans $]1, +\infty[$. Donc en faisant tendre k vers 1

par valeurs supérieures il vient : $\ln \frac{b}{a} \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x) \leq \ln \frac{b}{a}$.

<u>La limite de f en 0 est $\ln \frac{b}{a}$.</u>

(Q3) a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. h est continue sur $\mathbb{R}$ donc

h possède une primitive H sur $\mathbb{R}$. Notons que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ elle

est donc continue en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \int_{ax}^{bx} h(t) dt + \ln \frac{b}{a} = H(bx) - H(ax) + \ln \frac{b}{a}$.

$\lim\limits_{x \to 0} (H(bx) - H(ax)) = H(0) - H(0) = 0$ car H est continue en 0.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Intégrons par parties.

$f(x) = \int_{ax}^{bx} (e^t - 1) \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{e^t - 1}{t} \right]_{ax}^{bx} - \int_{ax}^{bx} e^t \left(-\frac{1}{t} \right) dt = -h(bx) + h(ax) + \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t} dt$

Rappelons que h est continue en 0.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -h(0) + h(0) + \ln \frac{b}{a}$. On retrouve <u>$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln \frac{b}{a}$.</u>

Exercice 23 **Endomorphisme de fonction.**

E est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique. Pour tout élément f de E, on pose : $\Phi(f) = f'$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. a) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{g \in E \mid \int_0^1 g(t)\,dt = 0\}$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$ sont supplémentaires.

Q1 Notons E' l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

* $E \subset E'$
* $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{E'}(x) = 0$. Ainsi $0_{E'}$ est 1 périodique. Alors $0_{E'} \in E$.
  Donc E n'est pas vide.
* Soit $(f,g) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(f,g) \in E^2$
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)(x+1) = \lambda f(x+1) + g(x+1) \overset{\dagger}{=} \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f+g)(x)$. Ainsi $\lambda f + g$ est 1-périodique donc appartient à E.

Les trois points précédents montrent que E est un sous-espace vectoriel de E'.

Ainsi <u>E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

▲ Soit f un élément de E. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f' est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
De plus f est 1-périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
En dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+1) = f'(x)$. f' est 1-périodique.
Alors $f' \in E$.
<u>Φ est une application de E dans E.</u>

▲ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda\, \Phi(f) + \Phi(g)$. <u>$\Phi$ est linéaire</u>

<u>Φ est un endomorphisme de E.</u>

Q2 a) Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\phi$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=0$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est constante.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et f est 1-périodique donc $f \in E$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = f'(x) = 0$; $\phi(f) = 0_E$. $f \in \mathrm{Ker}\,\phi$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\,\phi = \{ f \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \}$ ou Ker ϕ est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $g \in \mathrm{Im}\,\phi$. $\exists f \in E$, $\phi(f) = g$; $g = f'$. Alors $\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0) = 0$
  ↑ f est 1-périodique
- Réciproquement soit g un élément de E tel que $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

Soit f une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Montrons que $f \in E$ et que $\phi(f) = g$ ainsi g appartiendra à $\mathrm{Im}\,\phi$.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f est une primitive de g donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x+1) - f(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x+1) - f'(x) = g(x+1) - g(x) = 0$
↑ $g \in E$.

h est donc constante sur $\mathbb{R}$.

De plus $h(0) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. f est 1-périodique.

Ceci achève de montrer que f appartient à E. De plus $\phi(f) = f' = g$. Alors $g \in \mathrm{Im}\,\phi$.

Finalement $\mathrm{Im}\,\phi = \{ g \in E \mid \int_0^1 g(t)\,dt \}$.

b) Soit f un élément de E. Montrons par analyse-synthèse que : $\exists ! (f_1, f_2) \in \mathrm{Ker}\,\phi \times \mathrm{Im}\,\phi$,
$f = f_1 + f_2$

ANALYSE/UNICITÉ Supposons que $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ et $f_2 \in \mathrm{Im}\,\phi$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \lambda$ et $\int_0^1 f_2(t)\,dt = 0$.

Alors $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \lambda\,dt + \int_0^1 f_2(t)\,dt = \lambda$. $\lambda = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$ et $f_2(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt$. D'où l'unicité.

Exercice 24

Majoration de l'erreur dans la méthode du point moyen.

Q1 g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha,\beta]$. $I=\int_\alpha^\beta g(t)\,dt$. On se propose de majorer l'erreur que l'on commet en remplaçant I par $J=\int_\alpha^\beta h(t)\,dt$ où h est la fonction constante sur $[\alpha,\beta]$ qui vaut $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

On pose $h=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ et, pour tout x dans $[0,h]$, $\varphi(x)=\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}-x}^{\frac{\alpha+\beta}{2}+x} g(t)\,dt-2xg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

a) Calculer $\varphi(0)$. Montrer que $I-J=\varphi(h)$.

b) Montrer proprement que φ est dérivable sur $[0,h]$. Calculer φ' et montrer que : $\varphi'(0)=0$.

c) Montrer que φ' est dérivable sur $[0,h]$. Calculer φ''.

d) On pose $M=\underset{w\in[\alpha,\beta]}{\operatorname{Max}}|g''(w)|$. Montrer que pour tout x dans $[0,h]$, $|\varphi''(x)|\leqslant 2x\,M$ (on citera avec précision le résultat utilisé).

e) Par intégration en déduire que pour tout t dans $[0,h]$: $|\varphi'(t)|\leqslant t^2\,M$

En intégrant encore, montrer que :

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt-(\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|=|I-J|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}\underset{w\in[\alpha,\beta]}{\operatorname{Max}}|g''(w)|$$

Q2 f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, $x_k=a+k\,\dfrac{b-a}{n}$.

On pose encore : $\widehat{M}_n=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ et $M_2=\underset{u\in[a,b]}{\operatorname{Max}}|f''(u)|$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt-\widehat{M}_n\right|\leqslant\frac{(b-a)^3M_2}{24n^2}$$

(on pourra écrire $\int_a^b f(t)\,dt$ comme une somme d'intégrale et utiliser Q1).

Q1 a) $\varphi(0)=\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(t)dt-2\times0\times g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$. $\underline{\varphi(0)=0.}$

$J=\displaystyle\int_\alpha^\beta g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dt=(\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. $I-J=\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)dt-(\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\varphi(h)=\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}} g(t)dt-2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\int_\alpha^\beta g(t)dt-(\beta-\alpha)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Ainsi $\underline{I-J=\varphi(h)}$.

b) Soit G une primitive de g sur $[\alpha,\beta]$. Posons encore $\forall x\in[0,h]$, $u(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}-x$ et $v(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}+x$

Alors $\forall x\in[0,h]$, $\varphi(x)=G(v(x))-G(u(x))-2x\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Montrons alors que φ est dérivable sur $[0,h]$.

v est dérivable sur $[0,h]$ (fonction affine), $v([0,h])=\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]\subset[\alpha,\beta]$ et G est dérivable sur $[\alpha,\beta]$. Par composition $G\circ v$ est dérivable sur $[0,h]$.

On montre de la même manière que $G\circ u$ est dérivable sur $[0,h]$.

$x\mapsto 2xg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ étant dérivable sur $[0,h]$ (fonction affine), $\varphi : x\mapsto(G\circ v)(x)-(G\circ u)(x)-2x\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

est alors dérivable sur $[0,h]$. φ est dérivable sur $[0,h]$.

$\forall x\in[0,h]$, $\varphi'(x)=v'(x)\,G'(v(x))-u'(x)\,G'(u(x))-2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1\times g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)-\left(-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)\right)-2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\forall x\in[0,h]$, $\varphi'(x)=g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)+g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Alors $\varphi'(0)=0$.

c) v est dérivable sur $[0,h]$, $v([0,h])=\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]\subset[\alpha,\beta]$ et g est dérivable sur $[\alpha,\beta]$ donc $g\circ v$ est dérivable sur $[0,h]$. De même $g\circ u$ est dérivable sur $[0,h]$.
Ainsi $\varphi'=g\circ v+g\circ u-2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ est dérivable sur $[0,h]$. φ' est dérivable sur $[0,h]$.

$\varphi''=v'g'\circ v+u'g'\circ u-0$. $\forall x\in[0,h]$, $\varphi''(x)=g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)-g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)$.

d) Pour faciliter les écritures posons $M=\max_{w\in[\alpha,\beta]}|g''(w)|$ (... g'' est continue sur $[\alpha,\beta]$).

$\forall t\in[\alpha,\beta]$, $|g''(t)|\leq M$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à g' sur $[\alpha,\beta]$ donne : $\forall (r,s)\in[\alpha,\beta]^2$, $|g'(r)-g'(s)|\leq|r-s|\,M$.

Or $\forall x\in[0,h]$, $\frac{\alpha+\beta}{2}+x\in[\alpha,\beta]$ et $\frac{\alpha+\beta}{2}-x\in[\alpha,\beta]$.

Donc $\forall x\in[0,h]$, $|\varphi''(x)|=\left|g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)-g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)\right|\leq\left|\frac{\alpha+\beta}{2}+x-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)\right|M=|2x|M=2xM$.

$\forall x\in[0,h]$, $|\varphi''(x)|\leq 2xM$.

e) $\forall t\in[0,h]$, $|\varphi'(t)|=|\varphi'(t)-\varphi'(0)|=\left|\int_0^t\varphi''(x)\,dx\right|\overset{t\geq 0}{\leq}\int_0^t|\varphi''(x)|\,dx\leq\int_0^t 2xM\,dx=t^2M$.

$\forall t\in[0,h]$, $|\varphi'(t)|\leq t^2M$.

$|\varphi(h)|=|\varphi(h)-\varphi(0)|=\left|\int_0^h\varphi'(t)\,dt\right|\overset{h\geq 0}{\leq}\int_0^h|\varphi'(t)|\,dt\leq\int_0^h t^2M\,dt=\frac{h^3}{3}M$.

Donc $|I-J|=|\varphi(h)|\leq\frac{h^3}{3}M=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2^3\times 3}M=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}M$. Ce qui s'écrit encore :

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt-(\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|=|I-J|\leq\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}\max_{t\in[\alpha,\beta]}|g''(t)|.$$

Q2 $\int_a^b f(t)dt - \hat{\Pi}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - (x_{k+1}-x_k) f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)$

$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \\ \text{pour } k \in [\![0, n-1]\!] \end{array}\right.$

Alors $\left|\int_a^b f(t)dt - \hat{\Pi}_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - (x_{k+1}-x_k) f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|$

f étant de classe C^2 sur $[a,b]$ elle l'est aussi sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

En appliquant le résultat précédent on obtient alors :

$\left|\int_a^b f(t)dt - \hat{\Pi}_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24} \max_{w\in[x_k, x_{k+1}]} |f''(w)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24} M_2$.

$\left|\int_a^b f(t)dt - \hat{\Pi}_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24} M_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{24n^3} M_2 = n \times \frac{(b-a)^3}{24n^3} M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$

Finalement : $\left|\int_a^b f(t)dt - \hat{\Pi}_n\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$.