Exercice 1 **ECRICOME 99 Exercice 1** n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_n(x,y) = (x^n - y)\, e^{x-y}$.

On se propose de déterminer les extremums éventuels de cette fonction dans les deux cas particuliers $n = 2$ et $n = 1$.

Q1. a) Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. 1

b) Calculer les dérivées partielles du premier ordre de f_n. 1+1

Q2. Ici $n = 2$.

a) Montrer qu'il n'existe qu'un seul point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions nécessaires d'existence d'un extremum. 1+2 (1 pour ouvert)

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f_2 et montrer que le point (x_0, y_0) est bien un extremum (? !) dont on précisera la nature. 3+3

Q3. Ici $n = 1$.

a) Montrer qu'il existe une infinité de points en lesquels le gradient de f_1 s'annule. 1

b) Montrer qu'en ces points la fonction f_1 admet un minimum. 1+1+2

Exercice 1

Q1 a) et b) $(x,y)\to x-y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynômiale & $t\mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; ainsi par composition : $(x,y)\to e^{x-y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\to x^n-y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynômiale.

Donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)= nx^{n-1}e^{x-y}+(x^n-y)\times 1\times e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)=-1e^{x-y}+(x^n-y)(-1)e^{x-y}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)=(nx^{n-1}+x^n-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)=-(x^n-y+1)e^{x-y}$.

$(x,y)\to e^{x-y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\to nx^{n-1}+x^n-y$ (resp. $(x,y)\to -(x^n-y+1)$) aussi car c'est une fonction polynômiale. Ainsi $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ (resp $\frac{\partial f_n}{\partial y}$) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Ceci achève de montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Q2 a) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_2(x,y)=(x^2-y)e^{x-y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=(2x+x^2-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=-(x^2-y+1)e^{x-y}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=0 \iff \begin{cases}2x+x^2-y=0\\ x^2-y+1=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=x^2+1\\ 0=2x+x^2-x^2-1=2x-1\end{cases} \iff x=\frac{1}{2} \text{ et } y=\frac{5}{4}.$$

$(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant "les conditions nécessaires" d'extremum.

En clair $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ est l'unique point critique de f_2.

b) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y)=(2+2x+2x+x^2-y)e^{x-y}=(2+4x+x^2-y)e^{x-y}$; $r=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(\frac{1}{2},\frac{5}{4})=3e^{-3/4}$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y)=(+1+x^2-y+1)e^{x-y}=(2+x^2-y)e^{x-y}$; $t=\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(\frac{1}{2},\frac{5}{4})=e^{-3/4}$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}(x,y)=(-2x-x^2+y-1)e^{x-y}=(y-(x+1)^2)e^{x-y}$; $s=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}(\frac{1}{2},\frac{5}{4})=-e^{-3/4}$

$s^2-rt=[(-1)^2-3\times 1]e^{-3/2}=-2e^{-3/2}<0$ et $r>0$. **ou** $rt-s^2=2e^{-3/2}>0$ et $r>0$!

f_2 admet en $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ un minimum local strict.

Q3) a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y)=(x-y)e^{x-y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=(1+x-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=(y-x-1)e^{x-y}$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=x+1$.

$\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+1\}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où le gradient de f_1 s'annule.

Soit $A=(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$. $f(x_0,y_0)=(x_0-y_0)e^{x_0-y_0}=-e^{-1}$

Remarquons que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y)=\underline{(x-y)}e^{\overline{(x-y)}}$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=te^t$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi'(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$. $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi'(t)>0$, $\varphi'(-1)=0$; $\forall t\in]-\infty,-1[$, $\varphi'(t)<0$.

Tout cela suffit pour dire que φ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[-1,+\infty[$ (resp. $]-\infty,-1]$).

Ainsi $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi(t)>\varphi(-1)=-e^{-1}$ et $\forall t\in]-\infty,-1[$, $\varphi(t)>\varphi(-1)=-e^{-1}$

Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $\varphi(t)>-e^{-1}$ et $\varphi(-1)=-e^{-1}$.

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x-y\neq -1 \Rightarrow f_1(x,y)>-e^{-1}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x-y=-1 \Rightarrow f_1(x,y)=-e^{-1}$.

Ceci permet d'affirmer que
1.- f_1 possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$
2.- Le minimum est $-e^{-1}$
3.- Le minimum est atteint en (x_0,y_0) si et seulement si $y_0=x_0+1$

Complément.- Notons que f_2 admet un minimum global en $A=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$. Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$f_2(A+H)-f_2(A)=((\frac{1}{2}+\alpha)^2-(\beta+\frac{5}{4}))e^{\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\frac{5}{4}}-(\frac{1}{4}-\frac{5}{4})e^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}}=(\alpha^2+1+\alpha-\beta-\frac{5}{4})e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}+e^{-\frac{3}{4}}$

$f_2(A+H)-f_2(A)=e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}(\alpha^2+\alpha-\beta-1+e^{\beta-\alpha})$. Or $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^t\geqslant 1+t$ (inégalité de convexité). Ainsi $f_2(A+H)-f_2(A)\geqslant e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}(\alpha^2+\alpha-\beta-1+1+\beta-\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}\geqslant 0$.

Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f_2(A+H)-f_2(A)\geqslant 0$. f_2 admet en $A=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ un minimum absolu.

Ecricome 2006. Exercice 2.

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t, définie par :

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{1+xt}$$

1) Etude de f.

a) Justifier que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

b) Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

c) Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\mathrm{e}^{-t^2}$$

2) Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t$$

3) On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t$$

a) Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.
Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}\mathrm{e}^{-t^2}\,|x-x_0|^2$$

c) En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

$$g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Retrouver le sens de variations de g.

EXERCICE 2

1. a. Notons que le simple fait que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ ne donne pas l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout (x,t) dans $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car le domaine de définition de f n'est pas $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Il faut donc en faire un peu plus au niveau du a) pour pouvoir traiter le b) dans de bonnes conditions...

Posons $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x,t)=1+x\,t$. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. En particulier φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\Omega=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\mid 1+x\,t>0\}$. Observons que $\Omega=\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Ω est donc l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (programme de première année...)

Montrons alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

$(x,t)\to -t^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, car c'est une fonction polynôme, et $u\to e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; par composition $(x,t)\to e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, $\forall (x,t)\in\Omega,\ \varphi(x,t)\in\mathbb{R}^{+\,*}$ et $u\to\sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\,*}$; par composition $(x,t)\to\sqrt{1+x\,t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Alors par produit f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \boxed{\text{l'ouvert}}\ \Omega=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\mid 1+x\,t>0\}.}$$

▲ *Remarque* *Ce résultat assure l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *et de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ *lorsque* (x,t) *est dans* Ω. ▼

Notons que $\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1+x\,t\geqslant 1>0$ donc $[0,+\infty[\times[0,+\infty[\subset\Omega$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$$

b. $\forall (x,t)\in\Omega,\ f(x,t)=e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t}$ donc $\forall (x,t)\in\Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=e^{-t^2}\,\dfrac{t}{2\sqrt{1+x\,t}}=\dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}(1+x\,t)^{-\frac{1}{2}}$.

Alors $\forall (x,t)\in\Omega,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)t\,(1+x\,t)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}\,\dfrac{1}{(1+x\,t)^{\frac{3}{2}}}\cdot$ En particulier :

$$\boxed{\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{2}\,e^{-t^2}\,\frac{1}{\sqrt{(1+x\,t)}}\cdot}$$

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{t^2}{4}\, e^{-t^2}\, \frac{1}{(1+x\,t)^{\frac{3}{2}}}.}$$

c. $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1+x\,t \geqslant 1$ donc $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t} \geqslant 1$.

Ainsi $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}$.

Alors $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}\, \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant \dfrac{t^2}{4}\, e^{-t^2}$.

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\, e^{-t^2}.}$$

2. Soit α un réel strictement positif. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ h_\alpha(t) = t^\alpha\, e^{-t^2}$.

h_α est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} h_\alpha(t) = 0$. Ainsi h_α est prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne déjà la convergence de $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Montrons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall t \in [1,+\infty[, t \leqslant t^2$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ -t^2 \leqslant -t$. Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ et $0 \leqslant t^\alpha$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant h_\alpha(t) \leqslant t^\alpha\, e^{-t}$.

$\alpha+1$ étant strictement positif, $\Gamma(\alpha+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe. En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } \alpha \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

▲ *Exercice* *Montrer en fait que cette intégrale converge si et seulement si* $\alpha \in]-1,+\infty[$. ▼

Soit x un réel positif. Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ u(t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$.

- u est continue sur $[0,+\infty[$.

Rusons un peu pour éviter l'équivalent qui oblige à faire deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$; le premier cas ne passant pas dans le résultat précédent à cause du α strictement positif...

Observons que $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrons alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant u(t) = e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{t+x\,t} = \sqrt{1+x}\, t^{1/2}\, e^{-t^2}$;
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{1/2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après ce qui précède, ainsi

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{1+x}\, t^{1/2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}$.

• v est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant t\,e^{-t^2}$.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le début de la question.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif },\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$$

3. a) Soient x et y deux éléments de $[0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1+x\,t \leqslant 1+y\,t$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t} \leqslant \sqrt{1+y\,t}$ et $0 \leqslant e^{-t^2}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}\,\mathrm{d}t$ ou $g(x) \leqslant g(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ x \leqslant y \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)$.

$$\boxed{g \text{ est croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b. Fixons t dans $[0,+\infty[$ et posons : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t(x) = f(x,t)$.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω qui contient $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on peut affirmer que ℓ_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\ell_t''(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à ℓ_t permet d'écrire que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |\ell_t(x) - \ell_t(x_0) - (x-x_0)\,\ell_t'(x_0)| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2} \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} |\ell_t''(u)|.$$

Ainsi $\displaystyle\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2} \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right|$.

La majoration de **1. c.** donne : $\forall u \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right[\leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$.

Ainsi $\displaystyle\forall x \in [0,+\infty[,\ \underset{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]}{\mathrm{Max}} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$. Par conséquent :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2}\,\frac{t^2}{4}\,e^{-t^2} = \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.$$

$$\boxed{\text{Si } x_0 \in [0,+\infty[,\ \forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.}$$

c. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t$ converge d'après la question 2.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t$. De plus :

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t$ est absolument convergente (donc convergente) et l'on peut écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(x_0,t)\,\mathrm{d}t - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall x_0 \in [0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[,\ \left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

d. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$ distinct de x_0.

$\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En divisant par $|x-x_0|$ il vient :

$$0 \leqslant \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left(\frac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$

Alors, par encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et } \forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.}$$

$\forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{2}\, e^{-t^2}\, \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \geqslant 0$, donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On retrouve ainsi la croissance de } g \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

QUELQUES TEXTES DE CONCOURS

ECRICOME 2002

Début du problème

3. PROBLEME.

Deux biens C_1 et C_2 indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché.
On appelle "panier de biens" tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'ensemble D suivant :

$$D = \{(x, y) \text{ tels que } 0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y \leqslant 5, \quad 2x + 3y \leqslant 19\}$$

x, y désignent respectivement les quantités du bien C_1 et du bien C_2 qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.
Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.
On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.
Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble B des couples (x, y) de D tels que $x + y \leqslant 8$.
Les préférences de ce consommateur sur B, sont définies de la façon suivante :

(x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si $(y-3)\exp(x+2) \geqslant (y'-3)\exp(x'+2)$

L'application u définie sur B par :

$$u(x, y) = (y - 3)\exp(x + 2), \text{ pour } (x, y) \in B$$

s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

3.1. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

   a. (x, y) est préféré ou indifférent à (x, y).

   b. Si (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') et si (x', y') est préféré ou indifférent à (x'', y'') alors (x, y) est préféré ou indifférent à (x'', y'').

   c. (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') ou (x', y') est préféré ou indifférent à (x, y).

3.2. Courbes d'indifférence.

1. Représenter graphiquement l'ensemble B dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de B.

2. Dans ce qui suit, pour m réel, on désigne par A_m l'ensemble défini par :

$$A_m = \{(x, y) \in B \text{ tel que } u(x, y) = m\}$$

   a. Déterminer la fonction numérique f_m telle que, pour m fixé on ait, pour tout élément (x, y) de A_m , $y = f_m(x)$.

   b. Etudier et représenter dans le même repère que celui de la question 3.2.1, la fonction $y = f_m(x)$ pour $m = -8$, $m = 0$, $m = 8$.
   ($e^{-2} \approx 0.14, e^{-3} \approx 0.05, e^{-4} \approx 0.02, e^{-5} \approx 0.007, e^{-6} \approx 0.002, e^{-7} \approx 0.001$)

   c. Déterminer m_0 pour que la courbe représentative de $y = f_{m_0}(x)$ soit tangente à la droite (T) d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

   Représenter $y = f_{m_0}(x)$ sur le graphique.
   ($e^3 \approx 20.09, e^2 \approx 7.39, e \approx 2.72$).

3.3. Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. On admet que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est borné.

2. Justifier l'existence d'un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x, y) de B.

3. On note $\overset{\circ}{B}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples solutions du système :

$$\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < 5 \\ 2x + 3y < 19 \\ x + y < 8 \end{cases}$$

   Montrer que u n'admet pas d'extremum local sur $\overset{\circ}{B}$.

4. On étudie dans cette question le maximum de la fonction u sur B, sous la contrainte

$$2x + 3y = 19$$

   a. Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction g de la variable réelle, définie sur $[2, 5]$ par :

$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3}\exp(x + 2)$$

   b. Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

Tournez la page S.V.P.

5. Etudier de même la recherche du maximum de la fonction u sur B, sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Déduire de ce qui précède la valeur du couple (x_0, y_0).

3.4. Etude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien C_1.
Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, le numéro X_i affecté au $i^{ème}$ consommateur interrogé est une variable aléatoire.
Les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :
- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.
- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier N , avec N supérieur ou égal à 2.
Enfin, on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

PROBLÈME

3.1 Propriétés de la relation de référence.

1. a) $\forall (x,y) \in B,\ u(x,y) \geq u(x,y)$!

Pour tout (x,y) dans B, (x,y) est préféré ou indifférent à (x,y).

b) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B, \forall (x'',y'') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ et $u(x',y') \geq u(x'',y'') \Rightarrow u(x,y) \geq u(x'',y'')$

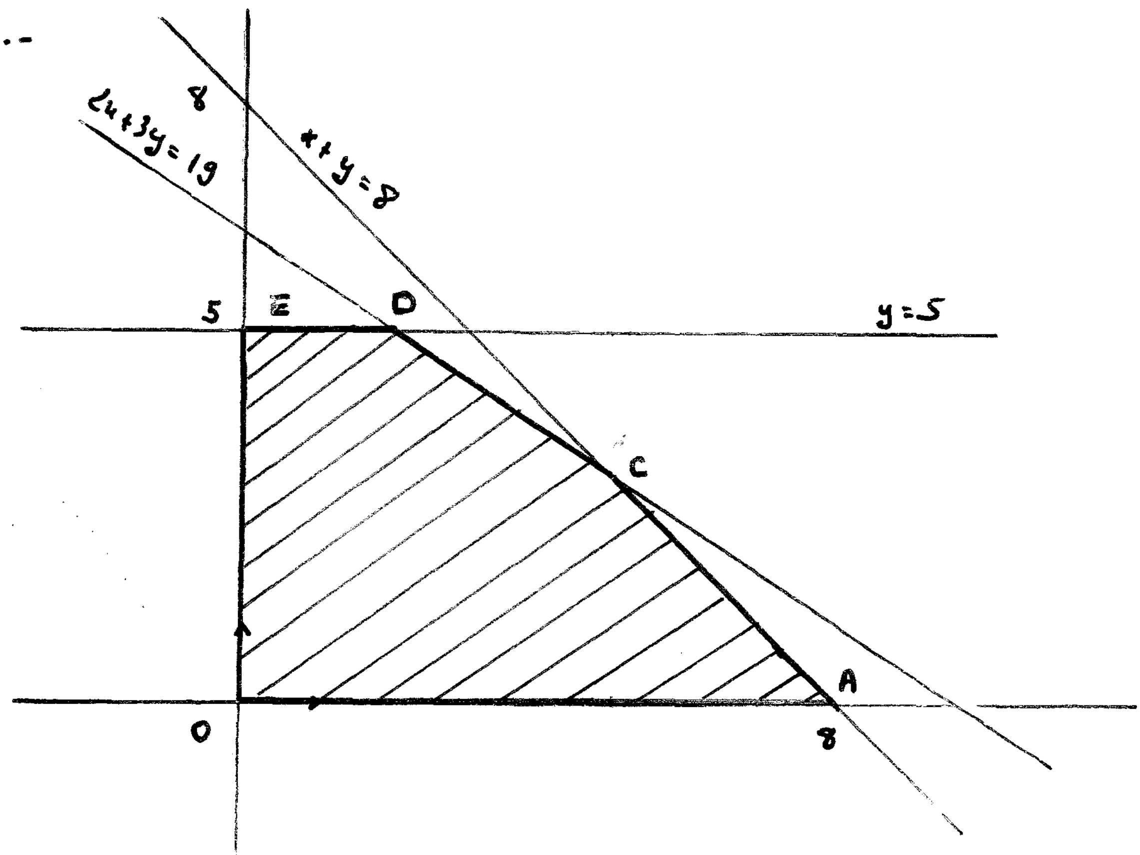
Si $(x,y), (x',y'), (x'',y'')$ sont trois éléments de B tels que (x,y) est préféré ou indifférent à (x',y') et (x',y') est préféré ou indifférent à (x'',y'') alors (x,y) est préféré ou indifférent à (x'',y'').

c) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ ou $u(x',y') \geq u(x,y)$!

Si (x,y) et (x',y') sont deux éléments de B, (x,y) est préféré ou indifférent à (x',y') ou (x',y') est préféré ou indifférent à (x,y).

3.2 Courbes d'indifférence

1.-



Notons que les droites d'équations $x+y=8$ et $2x+3y=19$ (resp. $2x+3y=19$ et $y=5$) se coupent au point C (resp. D) de coordonnées $(5,3)$ (resp. $(2,5)$).

Ainsi les cinq sommets du polygone constituant le bord de B sont les points O, A, C, D, E de coordonnées $(0,0)$, $(8,0)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(0,5)$.

2. – a) Soit $(x,y) \in A_m$.

$$u(x,y)=m \Leftrightarrow (y-3)e^{x+2}=m \Leftrightarrow y-3=m e^{-(x+2)} \Leftrightarrow y=m e^{-(x+2)}+3.$$

La fonction f_m telle que, pour tout élément (x,y) de A_m, $y=f_m(x)$ est $x \mapsto m e^{-(x+2)}+3$

b) $f_m : x \mapsto m e^{-(x+2)}+3$.

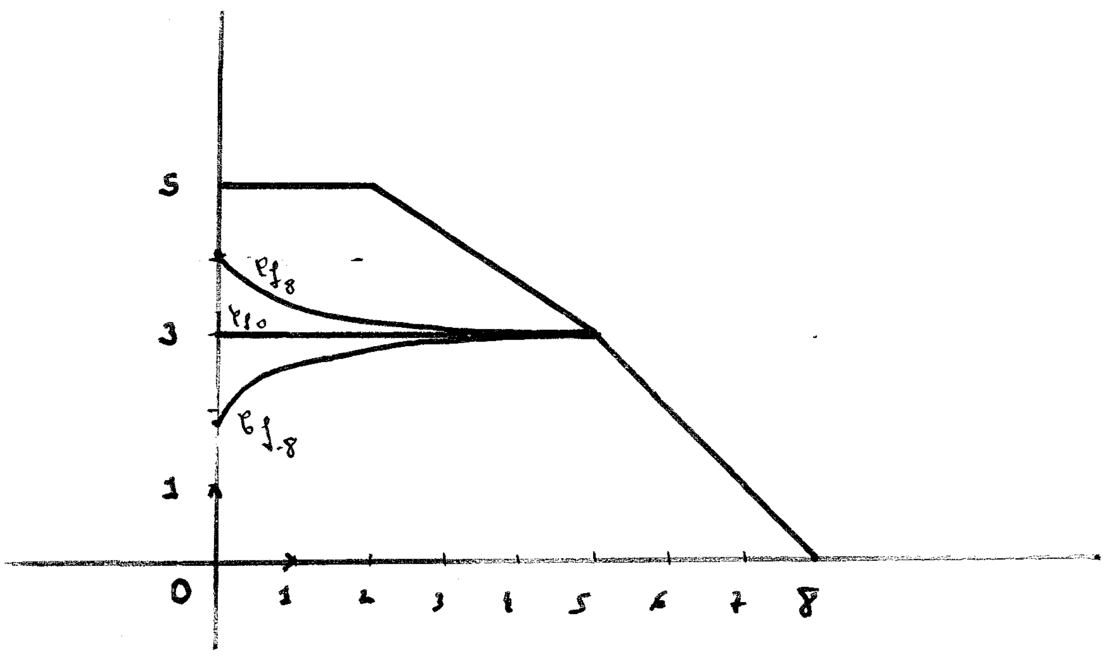
f_0 est constante et vaut 3. f_8 est décroissante sur $[0,8]$ et f_{-8} est croissante sur $[0,8]$

$f_8(0)=8e^{-2}+3 \simeq 4{,}12$; $f_8(1)=8e^{-3}+3 \simeq 3{,}4$; $f_8(2)=8e^{-4}+3 \simeq 3{,}16$; $f_8(3)=8e^{-5}+3 \simeq 3{,}056$

$f_8(4)=8e^{-6}+3 \simeq 3{,}016$; $f_8(5) \simeq 8e^{-7}+3 \simeq 3{,}008$

De même $f_{-8}(0) \simeq 1{,}88$; $f_{-8}(1) \simeq 2{,}6$; $f_{-8}(2) \simeq 2{,}84$; $f_{-8}(3) \simeq 2{,}944$; $f_{-8}(4) \simeq 2{,}984$

$f_{-8}(5) \simeq 2{,}992$.



c.. Soit m un réel.

T est tangente à la courbe représentative de f_m

$\Updownarrow$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ $\begin{cases} y = f_m(x) \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ f'_m(x) = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ $\begin{cases} y = me^{-(x+2)} + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ -me^{-(x+2)} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ $\begin{cases} y = \frac{2}{3} + 3 \\ x = \frac{1}{2}(19 - 3y) \\ m = \frac{2}{3}e^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ $\begin{cases} y = \frac{11}{3} \\ x = 4 \\ m = \frac{2}{3}e^6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}e^6.$

<u>Il existe un réel m_0 et un seul tel que la courbe représentative de f_{m_0} soit tangente à la droite (T) d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$; $m_0 = \frac{2}{3}e^6$.</u>

Notons que dans ces conditions le point de "contact" est le point de coordonnées $(4, \frac{11}{3})$.

Voir la représentation graphique à la page précédente.

3.3 Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. Soit $(x,y) \in B$. $0 \leq x$, $0 \leq y \leq 5$, $2x + 3y \leq 19$ et $x + y \leq 8$.

$0 \leq y \leq 5$ et $0 \leq x = 8 - y \leq 8$; $|x| \leq 8$ et $|y| \leq 8$!

$\operatorname{Max}(|x|, |y|) \leq 8$.

Alors B est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 8 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Ainsi <u>B est (fermé et) borné.</u>

2.. $(x,y) \mapsto y - 3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \mapsto e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($(x,y) \mapsto x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$)

Par produit $(x,y) \mapsto (y-3)e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi u est continue sur le fermé borné B. Alors u possède un maximum sur B.

$\exists (x_0, y_0) \in B, \ \forall (x,y) \in B, \ u(x_0,y_0) \geq u(x,y)$.

<u>Il existe donc un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x,y) de B.</u>

3. $\mathring{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et u est de classe C^1 sur $\mathring{U}$ ($(x,y) \mapsto y-3$ et $(x,y) \to e^{x+2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).

Si u possède un extremum local en un point (x,y) de $\mathring{U}$ alors $\mathrm{grad}\, u(x,y) = 0$.

$\forall (x,y) \in \mathring{U}, \ \mathrm{grad}\, u(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right) = \left((y-3)e^{x+2}, \ e^{x+2} \right) \neq (0,0)$.

Ainsi <u>u n'admet pas d'extremum local sur $\mathring{B}$.</u>

Notons alors que u atteint son maximum en un point de $B - \mathring{B}$ et que

$B - B^o = \{(x,y) \in B \mid x=0\} \cup \{(x,y) \in B \mid y=0\} \cup \{(x,y) \in B \mid y=5\} \cup \{(x,y) \in B \mid 2x+3y=19\} \cup \{(x,y) \in B \mid x+y=8\}$.

4. a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$(x,y) \in B$ et $2x+3y=19 \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3}(19-2x) \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 5 \\ x+y \leq 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3}(19-2x) \\ x \geq 0 \\ 0 \leq \frac{1}{3}(19-2x) \leq 5 \\ x + \frac{1}{3}(19-2x) \leq 8 \end{cases}$

$(x,y) \in B$ et $2x+3y=19 \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3}(19-2x) \\ x \geq 0 \\ 2 \leq x \leq \frac{19}{2} = 9{,}5 \\ x \leq 24-19 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [2,5] \\ y = \frac{1}{3}(19-2x) \end{cases}$

Posons $F_1 = \{(x,y) \in B \mid 2x+3y=19\} = \{(x,y) \in \ \mid x \in [2,5] \text{ et } y = \frac{1}{3}(19-2x)\}$.

$$\max_{(x,y) \in F_1} u(x,y) = \max_{x \in [2,5]} u\left(x, \tfrac{1}{3}(19-2x)\right) = \max_{x \in [2,5]} \left(\tfrac{1}{3}(19-2x)-3\right)e^{x+2} = \max_{x \in [2,5]} \frac{10-2x}{3} e^{x+2}$$

<u>Etudier le maximum de u sur B sous la contrainte $2x+3y=19$ c'est étudier le maximum de $x \mapsto \frac{10-2x}{3} e^{x+2}$ sur $[2,5]$.</u>

b. Posons $\forall x\in[2,5]$, $g(x)=\frac{1}{3}(10-2x)e^{x+2}$

g est dérivable sur $[2,5]$ et $\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{1}{3}(-2+10-2x)e^{x+2}$

$\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{2}{3}(4-x)e^{x+2}$.

g est strictement décroissante sur $[4,5]$ et strictement croissante sur $[2,4]$.

Ainsi g admet un maximum sur $[2,5]$ atteint une fois et une seule en 4.

$$\max_{x\in[2,5]} g(x)=g(4)=\frac{2}{3}e^{6}.$$

$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=\frac{2}{3}e^{6}$; ce maximum est atteint en le seul point $(4,\frac{1}{3}(19-2\times4))=(4,\frac{11}{3})$.

5. • $F_2=\{(x,y)\in B \mid x+y=8\}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 0\le y\le 5\\ 2x+3y\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 0\le 8-x\le 5\\ 2x+24-3x\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ 0\le x\\ 3\le x\le 8\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x\\ \text{et}\\ 5\le x\le 8\end{cases}$$

$$\max_{(x,y)\in F_2} u(x,y)=\max_{x\in[5,8]} u(x,8-x)=\max_{x\in[5,8]}(8-x-3)e^{x+2}=\max_{x\in[5,8]}(5-x)e^{x+2}$$

Posons $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)=(5-x)e^{x+2}$. $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)\le\hat{g}(5)=0$

$\max_{x\in[5,8]}\hat{g}(x)=0$. $\max_{(x,y)\in F_2} u(x,y)=0$; $(5,3)$ est le seul point qui réalise ce maximum.

• $F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0,\ 0\le y\le 5,\ 3y\le 19,\ y\le 8\}$

$F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(0,y)\ ;\ y\in[0,5]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=\max_{y\in[0,5]} u(0,y)=\max_{y\in[0,5]}(y-3)e^{2}=2e^{2}$$

$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=2e^{2}$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,5)$.

- $F_4 = \{(x,y)\in B \mid y=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x,\ 2x\leq 19,\ x\leq 8 \text{ et } y=0\} = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,8]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = \max_{x\in[0,8]} u(x,0) = \max_{x\in[0,8]} (-3e^{x+2}) = -3e^2$$

$\max\limits_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = -3e^2$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,0)$.

- $F_5 = \{(x,y)\in B \mid y=5\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x,\ 2x+15\leq 19,\ x+y\leq 8,\ y=5\}$

$F_5 = \{(x,5)\ ;\ x\in[0,2]\}$.

$$\max_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = \max_{x\in[0,2]} u(x,5) = \max_{x\in[0,2]} 2e^{x+2} = 2e^4.$$

$\max\limits_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = 2e^4$ et ce maximum est atteint en le seul point $(2,5)$.

6. $$\max_{(x,y)\in B} u(x,y) = \max_{(x,y)\in B\setminus \mathring{B}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4\cup F_5} u(x,y) = \max\left\{\frac{2}{3}e^6, 0, 2e^2, -3e^2, 2e^4\right\}$$

$\max\limits_{(x,y)\in B} u(x,y) = \frac{2}{3}e^6 = u\left(4, \frac{11}{3}\right)$; $\left(4, \frac{11}{3}\right)$ est le seul point qui réalise ce maximum.

Le maximum de u sur B est $\frac{2}{3}e^6$ et il est atteint en le seul point $(x_0, y_0) = \left(4, \frac{11}{3}\right)$.

EDHEC 2001

Problème

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents R_1, R_2, ..., R_r de probabilités respectives x_1, x_2, ..., x_r. On admet que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1) a. Exprimer la variable X en fonction de X_1, X_2, ..., X_r.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, ..., r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

2) a. Donner la valeur de $x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ puis écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera f, des $(r-1)$ variables x_1, ..., x_{r-1}.

La fonction f est donc définie sur l'ouvert $\big(]0, 1[\big)^{r-1}$ de $\mathbb{R}^{r-1}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\big(]0, 1[\big)^{r-1}$.

3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $R = \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \cdots, \dfrac{1}{r}\right)$.

4) Déterminer la matrice M, élément de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R)$.

5) On pose $A = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Montrer que J est diagonalisable.

b. Exprimer J^2 en fonction de J et r. En déduire que les valeurs propres de J sont 0 et $r-1$.

c. Montrer que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre $r-1$ est de dimension 1.

d. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour montrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P d'inverse ${}^tP$, telle que $A = PD{}^tP$ où D est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont les $(r-2)$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la $(r-1)^{\text{ème}}$ ligne étant égal à r.

6) a. Déduire des questions précédentes que pour tout H non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tHMH > 0$.

b. En posant ${}^tH = (h_1, h_2, \ldots, h_{r-1})$, exprimer ${}^tHMH$ en fonction des réels h_i et des dérivées partielles d'ordre 2 de f au point R.

c. En déduire que f présente un minimum local au point R.

d. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

---

1) a. X est la variable aléatoire égale au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves.

Pour tout élément i de $[\![1, r]\!]$, X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon. Ainsi la somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ est égale au nombre de variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ ayant pris la valeur 1 à l'issue des n épreuves ; c'est à dire au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves. Finalement :

$$\boxed{X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r.}$$

b. Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$. Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ notons B_i^k l'événement le résultat R_i n'est pas obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

Les événements B_i^1, B_i^2, ..., B_i^n sont indépendants.

Alors $P(X_i = 1) = P(B_i^1 \cap B_i^2 \cap \cdots \cap B_i^n) = P(B_i^1)\, P(B_i^2) \cdots P(B_i^n) = (1 - x_i)(1 - x_i) \cdots (1 - x_i) = (1 - x_i)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } i \text{ de } [\![1, r]\!],\ P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n \text{ et } P(X_i = 0) = 1 - (1 - x_i)^n.}$$

c. $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} X_i$. La linéarité de l'espérance donne alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E(X_i)$.

Or, pour tout élément i de $[\![1, r]\!]$, $E(X_i) = P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n$. Ainsi

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n.}$$

2) a. Pour tout élément i de $[\![1, r]\!]$, notons S_i l'événement la première épreuve donne le résultat R_i. $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$ est un système complet d'événements donc :

$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = P(S_1) + P(S_2) + \cdots + P(S_r) = P(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r) = 1$. Alors :

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1.}$$

$E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - x_i)^n + (1 - x_r)^n$. Or $1 - x_r = x_1 + x_2 + \cdots + x_{r-1}$ donc :

$$\boxed{\begin{gathered} E(X) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - x_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i\right)^n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par :} \\ \forall (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) \in (]0, 1[)^{r-1},\ f(t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - t_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i\right)^n. \end{gathered}}$$

b. f est une fonction polynômiale donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0, 1[)^{r-1}.}$$

3) a. $\forall (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) \in (]0,1[)^{r-1},\ f(t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} (1-t_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^n$ donc

$$\boxed{\forall k \in [\![1, r-1]\!],\ \forall (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) \in (]0,1[)^{r-1},\ \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}) = -n(1-t_k)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1}.}$$

b. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de $(]0,1[)^{r-1}$ où les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

Soit $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1})$ un élément de $(]0,1[)^{r-1}$.

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial t_k}(T) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ -n(1-t_k)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1} = 0.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ (1-t_k)^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1}.$

L'application $x \to x^{n-1}$ étant injective sur $[0, +\infty[$ il vient alors :

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ 1 - t_k = \sum_{i=1}^{r-1} t_i.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - t_1 = \sum_{i=1}^{r-1} t_i$ et $1 - t_1 = 1 - t_2 = \cdots = 1 - t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - t_1 = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - t_1 = (r-1)\, t_1$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1}{r}$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1} = \dfrac{1}{r}\cdot$

Observons que $\left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \ldots, \dfrac{1}{r} \right)$ est bien élément de $(]0,1[)^{r-1}$. Ainsi :

$R = \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \ldots, \dfrac{1}{r} \right)$ est le seul point de $(]0,1[)^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

4) Soit $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1})$ un élément de $(]0,1[)^{r-1}$. Soient i et j deux éléments de $[\![1, r-1]\!]$.

$\dfrac{\partial f}{\partial t_j}(T) = -n(1-t_j)^{n-1} + n \left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k \right)^{n-1}.$

• Supposons que i n'est pas égal à j : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(T) = n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k \right)^{n-2}.$

En particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R) = n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} \dfrac{1}{r} \right)^{n-2} = n(n-1) \left(\dfrac{r-1}{r} \right)^{n-2}.$

• Supposons que i est égal à j : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}(T) = n(n-1)(1-t_i)^{n-2} + n(n-1)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} t_k\right)^{n-2}$.

En particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}(R) = n(n-1)\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^{n-2} + n(n-1)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1}\dfrac{1}{r}\right)^{n-2} = 2n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2}$.

$$\boxed{M = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}(R)\right)_{(i,j)\in[\![1,r-1]\!]^2} \text{ et } \forall (i,j)\in[\![1,r-1]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}(R) = \begin{cases} n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \text{si } i\neq j \\ 2n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \text{si } i=j \end{cases}.}$$

Ou encore :

$$\boxed{M = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

5) a. J est une matrice symétrique et réelle donc

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable.}}$$

b. $J = (s_{i,j})$ avec $s_{i,j} = 1$ pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,r-1]\!]^2$. Alors $J^2 = (r_{i,j})$ avec, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,r-1]\!]^2$:

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{r-1} s_{i,k}\times s_{k,j} = \sum_{k=1}^{r-1} 1\times 1 = r-1 = (r-1)\ s_{i,j}.$$

$$\boxed{J^2 = (r-1)\ J.}$$

$J^2-(r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$ donc $P = X^2-(r-1)X$ est un polynôme annulateur de J dont les racines sont 0 et $r-1$.

Les valeurs propres de J étant nécessairement racines de P on peut affirmer que les seules valeurs propres <u>possibles</u> de J sont 0 et $r-1$.

Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de J. Alors J est inversible. Comme $J^2 = (r-1)J$, en multipliant à droite par J^{-1} on obtient $J = (r-1)I$ ce qui n'est pas très raisonnable car $r-1$ est supérieur ou égal à 2. Ainsi 0 est valeur propre de J.

Raisonnons de la même manière pour $r-1$. Supposons que $r-1$ n'est pas une valeur propre de J.
$J-(r-1)I$ est alors inversible. Comme $J(J-(r-1)I) = J^2-(r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$, il vient en multipliant à droite par $(J-(r-1)I)^{-1}$: $J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$. Ce qui est impossible.

Finalement 0 et $r-1$ sont des valeurs propres de J et ce sont les seules possibles.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J \text{ sont } 0 \text{ et } r-1.}$$

c. Toutes les colonnes de J sont identiques et non nulles, donc J est de rang 1. Ceci confirme que 0 est valeur propre de J et montre en plus que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 est de dimension $r-2$ (penser au théorème du rang appliqué à un endomorphisme de matrice J...). Le sous-espace propre de J associé à $r-1$ est alors de dimension 1 puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de J est $r-1$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } J \text{ associé à la valeur propre } r-1 \text{ est de dimension 1.}}$$

d. J est symétrique et réelle. J admet exactement deux valeurs propres 0 et $r-1$. Les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont de dimensions respectives $r-2$ et 1.

Ainsi il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0 et $r-1$.

$\forall k \in [\![1, r-2]\!], AU_k = IU_k + JU_k = U_k$ et $AU_{r-1} = IU_{r-1} + JU_{r-1} = U_{r-1} + (r-1)U_{r-1} = r\,U_{r-1}$.

Alors $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$.

- $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r \end{pmatrix}$ car $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ est une base (orthonormale) de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l}A \text{ est diagonalisable et il existe une matrice } P, \text{ de } \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R}) \text{ d'inverse } {}^tP \text{ telle que } A = PD\,{}^tP \text{ où } D \text{ est la} \\ \text{matrice \underline{diagonale} de } \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R}) \text{ dont les } (r-2) \text{ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et le dernier} \\ \text{égal à } r.\end{array}}$$

6) a. Soit H un élément non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$. Pour montrer que ${}^tHMH$ est strictement positif il suffit de prouver que ${}^tHAH$ est strictement positif car $M = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} A$ et $n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$ est strictement positif.

Posons $H' = {}^tPH = P^{-1}H = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-1} \end{pmatrix}$.

$${}^tHAH = {}^tHPD{}^tPH = {}^t({}^tPH)D{}^tPH = {}^tH'DH' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_{r-1}) \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-2} \\ rh'_{r-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{r-2} h'^2_k + r\, h'^2_{r-1}.$$

${}^tHAH = \sum\limits_{k=1}^{r-1} h'^2_k + (r-1)\, h'^2_{r-1} = \|H'\|^2 + (r-1)\, h'^2_{r-1}$.

Si $H' = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ alors $P^{-1}H = {}^tPH = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ et donc $H = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ car P^{-1} est inversible.

Ainsi H' n'est pas nul. Alors $\|H'\|^2 > 0$ et $(r-1)\, h'^2_{r-1} \geqslant 0$ donc ${}^tHAH > 0$. Ceci achève de montrer que ${}^tHMH > 0$.

$$\boxed{\text{Si } H \text{ est un élément non nul de } \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}) \text{ alors : } {}^tHMH > 0.}$$

<u>Remarque</u>

Il convient sans doute de remarquer que la démonstration de ce résultat ne nécessitait pas une diagonalisation.

En effet soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix}$ *un élément non nul de* $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.

${}^tHAH = {}^tHIH + {}^tHJH = {}^tHH + \sum\limits_{i=1}^{r-1} \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_i\, s_{i,j}\, h_j = \|H\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_i\, h_j = \|H\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} h_i \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_j.$

${}^tHAH = \|H\|^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{r-1} h_i \right)^2$. *Ainsi* ${}^tHAH > 0$ *car* $\|H\|^2 > 0$. *Donc* ${}^tHMH > 0$.

b. Une utilisation simple du produit matriciel donne :

$$\boxed{\forall H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tHMH = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R)\, h_i h_j\ .}$$

c. $M = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R) \right)$ et $\forall H \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}),\ H \neq 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tHMH > 0$. Le cours indique alors que :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local au point } R.}$$

d. $f(R) = \sum_{i=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r}\right)^n = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$

$$\boxed{\text{La valeur de } E(X) \text{ correspondant à ce minimum est } r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\cdot}$$

<u>*Remarque*</u>

Un léger doute nous envahit. Le (vrai) problème a-t-il vraiment été traité ?

Quel problème ? Sans doute trouver le minimum de $E(X) = \sum_{k=1}^{r} (1 - x_i)^n$ *sous les contraintes* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_r > 0$ *et* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Ce qui précède nous a permis de montrer que si ce minimum existe et qu'il est atteint en $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ *alors il vaut* $r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$ *et* $u_1 = u_2 = \cdots = u_{r-1} = \frac{1}{r}$ *et donc* $u_r = \frac{1}{r}\cdot$

Est-ce de la suffisance de ne pas se suffire du nécessaire ? Pas nécessairement ! Alors achevons de résoudre le problème.

Posons $\forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k = \frac{1}{r}\cdot$ $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ *est un élément de* $(]0, 1[)^r$ *vérifiant :* $u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 1$ *et* $\sum_{k=1}^{r} (1 - u_k)^n = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *un élément de* $(]0, 1[)^r$ *vérifiant :* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n \geqslant r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$

$\varphi : t \to t^n$ *est convexe sur* $]0, 1[$ *car* φ'' *est positive sur* $]0, 1[$.

Ainsi si $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ *est une famille d'éléments de* $]0, 1[$ *et si* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *est une famille de réels positifs dont la somme est* 1 *on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, y_k\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, (y_k)^n$$

En appliquant ce résultat avec $y_k = 1 - x_k$ *et* $\alpha_k = \frac{1}{r}$ *(pour tout* k *dans* $[\![1, r]\!]$*) il vient :*

$\left(\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)\right)^n \leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n.$

Or $\left(\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)\right)^n = \left(\frac{1}{r}(r-1)\right)^n = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n$ *car* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Alors $\left(\frac{r-1}{r}\right)^n \leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n$. *Ce qui donne* $\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n \geqslant r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$

On peut maintenant dire que $E(X)$ *est minimum si et seulement si* $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}\cdot$
